Capítulo 7

Trigonometria - Primeira Parte

7.1 Introdução

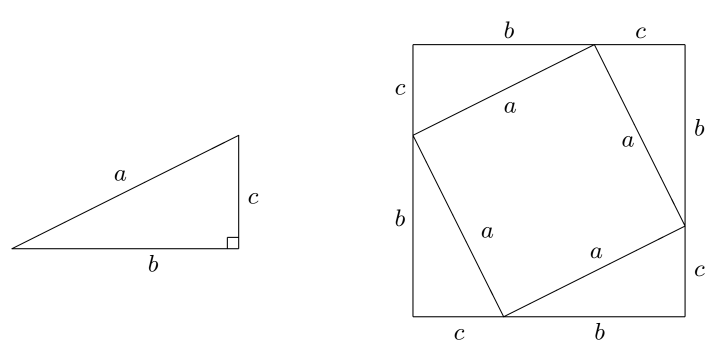
Triângulo é um polígono com 3 ângulos internos, logo 3 lados. Podemos classificá-los de duas maneiras:

- quanto aos tamanhos dos lados:
  - equilátero - 3 lados de mesmo comprimento,
  - isósceles - 2 lados de mesmo comprimento,
  - escaleno - 3 lados de comprimentos diferentes;
- quanto às medidas dos ângulos:
  - acutângulo - 3 ângulos agudos (menores que 90^o graus),
  - retângulos - 1 ângulo reto (90^o graus),
  - obtusângulo - 1 ângulo obtuso (maior que 90^o graus).

7.2 Triângulo retângulo e o Teorema de Pitágoras

Em um triângulo retângulo, Figura 7.1(a), os lados que formam o ângulo reto são denominados catetos e o lado oposto ao ângulo reto é chamado hipotenusa. Os comprimentos da hipotenusa e dos catetos estão relacionados pelo Teorema de Pitágoras

$$a^2 = b^2 + c^2. \tag{7.1}$$



(a) Um triângulo retângulo. (b) O Teorema de Pitágoras.

Figura 7.1: Triângulo retângulo e o Teorema de Pitágoras.

Uma prova bastante simples do Teorema de Pitágoras pode ser obtida através da Figura 7.1(b): a área do quadrado externo é igual à soma da área do quadrado interno mais a área dos 4 triângulos retângulos, isto é:

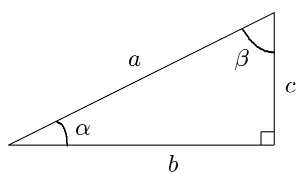
$$a^2 + 4\frac{bc}{2} = (b+c)^2 \;\therefore\; a^2 + 2bc = b^2 + 2bc + c^2 \;\therefore\; a^2 = b^2 + c^2.$$

7.3 Razões trigonométricas

Para cada ângulo agudo de um triângulo retângulo define-se 6 razões trigonométricas (conhecidas como seno, cosseno, tangente, cotangente, secante e cossecante) da seguinte maneira

- seno $= \frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}}$
- tangente $= \frac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adjacente}}$
- secante $= \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto adjacente}}$
- cosseno $= \frac{\text{cateto adjacente}}{\text{hipotenusa}}$
- cotangente $= \frac{\text{cateto adjacente}}{\text{cateto oposto}}$
- cossecante $= \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto oposto}}$

A Figura 7.2 ilustra as 6 razões trigonométricas para os ângulos β e α de um triângulo retângulo.



seno:	$sen(\alpha) = \frac{c}{a}$	$sen(\beta) = \frac{b}{a}$
cosseno:	$cos(\alpha) = \frac{b}{a}$	$cos(\beta) = \frac{c}{a}$
tangente:	$tg(\alpha) = \frac{c}{b}$	$tg(\beta) = \frac{b}{c}$
cotangente:	$ctg(\alpha) = \frac{b}{c}$	$ctg(\beta) = \frac{c}{b}$
secante:	$sec(\alpha) = \frac{a}{b}$	$sec(\beta) = \frac{a}{c}$
cossecante:	$csc(\alpha) = \frac{a}{c}$	$csc(\beta) = \frac{a}{b}$

Figura 7.2: As razões trigonométricas.

Na Figura 7.3(a) traçamos a diagonal de um quadrado de lado a e então determinamos as razões trigonométricas para o ângulo de 45^o obtido:

$$cos(45^o) = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad , \quad sen(45^o) = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad , \quad tg(45^o) = \frac{a}{a} = 1.$$

Na Figura 7.3(b) traçamos a altura de um triângulo equilátero de lado a e então determinamos as razões trigonométricas para os ângulos de 30^o e 60^o obtidos:

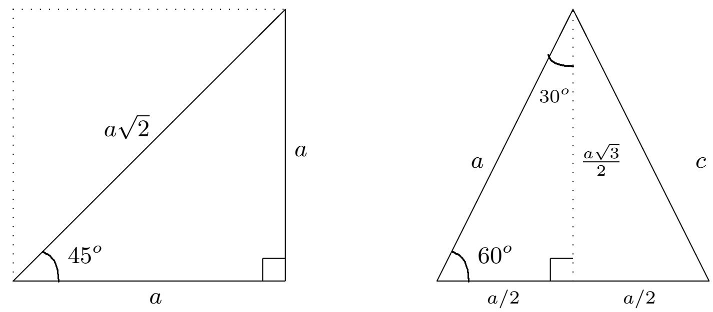
$$cos(30^o) = \frac{a\sqrt{3}/2}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad , \quad sen(30^o) = \frac{a/2}{a} = \frac{1}{2} \quad , \quad tg(30^o) = \frac{a/2}{a\sqrt{3}/2} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

$$cos(60^o) = \frac{a/2}{a} = \frac{1}{2} \quad , \quad sen(60^o) = \frac{a\sqrt{3}/2}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad , \quad tg(60^o) = \frac{a\sqrt{3}/2}{a/2} = \sqrt{3}.$$

A tabela 7.1 resume estes resutados.

ângulo	30^o	45^o	60^o
sen	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tg	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

Tabela 7.1: Valores de seno, cosseno e tangente dos ângulos 30^o, 45^o e 60^o.



(a) Ângulo de 45^o.   (b) Ângulos de 30^o e 60^o.

Figura 7.3: Ângulos fundamentais.

7.4 Algumas identidades trigonométricas

Na Figura 7.2 temos que $b = a\,cos(\alpha)$ e $c = a\,sen(\alpha)$; obtemos então as seguintes identidades:

$$tg(\alpha) = \frac{c}{b} = \frac{a\,sen(\alpha)}{a\,cos(\alpha)} \;\therefore\; tg(\alpha) = \frac{sen(\alpha)}{cos(\alpha)} \tag{7.2a}$$

$$cotg(\alpha) = \frac{b}{c} = \frac{a\,cos(\alpha)}{a\,sen(\alpha)} \;\therefore\; cotg(\alpha) = \frac{cos(\alpha)}{sen(\alpha)} \tag{7.2b}$$

$$sec(\alpha) = \frac{a}{b} = \frac{a}{a\,cos(\alpha)} \;\therefore\; sec(\alpha) = \frac{1}{cos(\alpha)} \tag{7.2c}$$

$$csc(\alpha) = \frac{a}{c} = \frac{a}{a\,sen(\alpha)} \;\therefore\; csc(\alpha) = \frac{1}{sen(\alpha)} \tag{7.2d}$$

Usando o Teorema de Pitágoras obtemos

$$b^2 + c^2 a^2 \;\therefore\; a^2\,cos^2(\alpha) + a^2\,sen^2(\alpha) = a^2 \;\therefore\; a^2\big[cos^2(\alpha) + sen^2(\alpha)\big] = a^2$$

donde

$$cos^2(\alpha) + sen^2(\alpha) = 1 \tag{7.2e}$$

A identidade (7.2e) é chamada de identidade fundamental: o quadrado do cosseno mais o quadrado do seno de qualquer ângulo é sempre igual a um. A partir da identidade fundamental obtemos outras duas importantes identidades:

$$\frac{cos^2(\alpha) + sen^2(\alpha)}{cos^2(\alpha)} = \frac{1}{cos^2(\alpha)} \;\therefore\; 1 + \frac{sen^2(\alpha)}{cos^2(\alpha)} = \frac{1}{cos^2(\alpha)} \;\therefore\; 1 + tg^2(\alpha) = sec^2(\alpha) \tag{7.2f}$$

$$\frac{cos^2(\alpha) + sen^2(\alpha)}{sen^2(\alpha)} = \frac{1}{sen^2(\alpha)} \;\therefore\; \frac{cos^2(\alpha)}{sen^2(\alpha)} + 1 = \frac{1}{sen^2(\alpha)} \;\therefore\; cotg^2(\alpha) + 1 = csc^2(\alpha) \tag{7.2g}$$

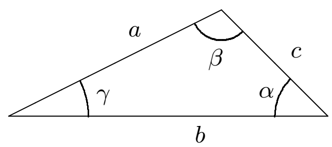
7.5 A Lei dos Cossenos

Vimos que para triângulos retângulos as medidas dos lados estão relacionados pelo Teorema de Pitágoras. Para triângulos quaisquer os comprimentos dos lados estão relacionados pela Lei dos Cossenos (Figura 7.4).

A demostração da Lei dos Cossenos para o ângulo α pode ser obtida a partir da Figura 7.5. No triângulo retângulo da esquerda temos

$$cos(\gamma) = \frac{x}{a} \;\therefore\; x = acos(\gamma) \tag{7.3a}$$

$$a^2 = x^2 + H^2 \;\therefore\; H^2 = a^2 - x^2. \tag{7.3b}$$



Para o ângulo α: $\quad a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\,cos(\alpha)$

Para o ângulo β: $\quad b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\,cos(\beta)$

Para o ângulo γ: $\quad c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\,cos(\gamma)$

Figura 7.4: A Lei dos Cossenos.

No triângulo retângulo da direita temos

$$c^2 = H^2 + (b - x)^2 = H^2 + b^2 - 2bx + x^2 \tag{7.3c}$$

Substituindo (7.3a) e (7.3b) em (7.3c) obtemos

$$\begin{aligned} c^2 &= a^2 - x^2 + b^2 - 2ab\,cos(\gamma) + x^2 \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab\,cos(\gamma) \end{aligned}$$

que é a Lei dos Cossenos para o ângulo γ.

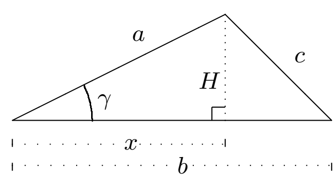
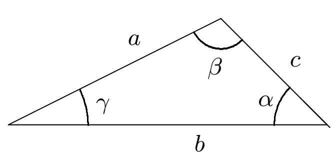


Figura 7.5: A demostração da Lei dos Cossenos para o ângulo γ.

7.6 A Lei dos Senos

Outra relação entre os comprimentos dos lados e os ângulos de um triângulo qualquer é a Lei dos Senos (Figura 7.6), cuja demonstração fica a cargo do leitor (Problema Teórico 7.1).



$$\frac{sen(\beta)}{b} = \frac{sen(\alpha)}{a} = \frac{sen(\gamma)}{c}$$

Figura 7.6: A Lei dos Senos.

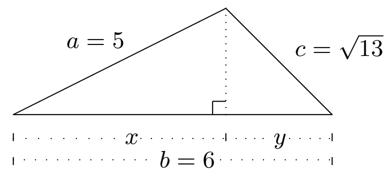
7.7 Problemas Propostos

Problema 7.1 *A altura de um triângulo equilátero mede* $2\,cm$*. Determine seu perímetro e sua área.*

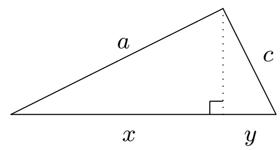
Problema 7.2 *A diagonal de um quadrado mede* $3\sqrt{6}\,cm$*. Determine seu perímetro e sua área.*

Problema 7.3 (PUC-SP) *Se a altura de um trapézio isóceles medir* $8\,dm$ *e suas bases medirem, respectivamente,* $27\,dm$ *e* $15\,dm$*, determine a medida de suas diagonais.*

Problema 7.4 *No triângulo dado determine as medidas* x *e* y*.*



Problema 7.5 *No triângulo dado sabe-se que* $c = 5$, $y = 3$ *e lado de comprimento* a *é perpendicular ao lado de comprimento* c. *Determine* a *e* x.



Problema 7.6 *Em um triângulo retângulo um dos catetos mede* 5 *e sua projeção sobre a hipotenusa mede* 4. *Determine:*

(a) o comprimento do outro cateto;

(b) o comprimento da hipotenusa;

(c) seu perímetro;

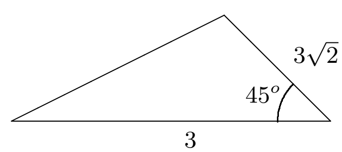
(d) sua área.

Problema 7.7 *Em um triângulo a hipotenusa mede* 10 *e a razão entre os comprimentos dos catetos é* $\frac{3}{4}$. *Determine os comprimentos das projeções dos catetos sobre a hipotenusa.*

Problema 7.8 *[PUC-SP] O perímetro de um losângo mede* $20\,cm$ *e uma de sua diagonais mede* $8\,cm$. *Quanto mede a outra diagonal?*

Problema 7.9 *Num triângulo retângulo a altura relativa à hipotenusa mede* $12\,cm$ *e a projeção de um dos catetos sobre a hipotenusa mede* $16\,cm$. *Determine o comprimento dos catetos deste triângulo.*

Problema 7.10 *Determine o perímetro e a área do triângulo dado.*



Problema 7.11 *Os lados de um triângulo medem* $a = \sqrt{2}$, $b = 2$ *e* $c = 1 + \sqrt{3}$. *Determine as medidas de seus ângulos.*

Problema 7.12 *Um triângulo tem seus vértices nos pontos* A, B *e* C. *Sabe-se que* $\overline{AC} = 3$ *e* $\overline{BC} = 4$.

(a) Sabendo-se que $\overline{AB} = 7$ *e* α *é o ângulo oposto ao lado* $\overline{BC}$, *determine* $cos(\alpha)$;

(b) É possível que o ângulo oposto ao lado $\overline{AC}$ *seja de* 60^o*? Explique.*

Problema 7.13 *Um terreno têm a forma de um paralelogramo cujos lados medem* $40\,m$ *e um dos ângulo internos mede* 120^o. *Seu proprietário irá cercá-lo e também dividi-lo ao meio com uma cerca com* 3 *fios de arame. Determine a quantidade de arame a ser utilizada.*

Problema 7.14 (ITA-SP) *Os lados de um triângulo medem* a, b *e* c *centímetros. Qual o valor do ângulo interno deste triângulo, oposto ao lado que mede* a *centímetros, se forem satisfeitas as seguintes relações:* $3a = 7c$ *e* $3b = 8c$.

Problema 7.15 (ITA-SP) *Num losângo* $ABCD$ *a soma das medidas dos ângulos obtusos é o triplo da soma das medidas dos ângulos agudos. Se sua diagonal menor mede* d, *determine sua aresta.*

Problema 7.16 (Universidade Gama Filho - RJ) *Calcular os valores de* k *que verificam simultaneamente as igualdades:* $sen(\theta) = k - 1$ *e* $cos(\theta) = \sqrt{3 - k^2}$.

Problema 7.17 *Para cada razão trigonométrica dada utilize as identidades da Seção 7.4 para determinar as outras cinco.*

(a) $sen(\alpha) = \frac{3}{5}$ *(c)* $tg(\gamma) = 4$ *(e)* $cos(\epsilon) = \frac{3}{5}$ *(g)* $csc(\phi) = 2$

(b) $cos(\beta) = \frac{1}{7}$ *(d)* $cotg(\delta) = 3$ *(f)* $tg(\theta) = \frac{1}{2}$ *(h)* $sec(\sigma) = 3$

Problema 7.18 *Uma pessoa na margem de um rio vê, sob um ângulo de 60^o, o topo de uma torre na margem oposta. Quando ela se afasta $40\,m$ perpendicularmente à margem do rio, esse ângulo é de 30^o.*

(a) Qual a largura do rio? *(b) Qual a altura da torre?*

Problema 7.19 *Verifique a veracidade das igualdades a seguir.*

(a) $\frac{sen(\alpha)}{1+cos(\alpha)} + \frac{1+cos(\alpha)}{sen(\alpha)} = 2csc(\alpha)$

(b) $\frac{2-sen^2(\beta)}{cos^2(\beta)} - tg^2(\beta) = 2$

(c) $\frac{2tg(\gamma)}{1+tg^(\gamma)} = 2sen(\gamma)cos(\gamma)$

(d) $\frac{sec(\theta)+sen(\theta)}{csc(\theta)+cos(\theta)} = tg(\theta)$

(e) $sec^2(\phi)csc^2(\phi) = tg^2(\phi) + cotg^2(\phi) + 2$

(f) $\big[tg(\sigma) - sen(\sigma)\big]^2 + \big[1 - cos(\sigma)\big]^2 = \big[sec(\sigma) - 1\big]^2$

Problema 7.20 *Explique por quê as igualdades dadas são inválidas.*

(a) $sen(\alpha) = 3$ *(b)* $cos(\alpha) = 5$ *(c)* $sec(\alpha) = \frac{1}{2}$ *(d)* $csc(\alpha) = \frac{3}{4}$

Problema 7.21 *Dois ângulos α e β são ditos complementares se $\alpha+\beta = \frac{\pi}{2}$. Use a Figura 7.2 para se convencer dos seguintes fatos:*

(a) o seno de um ângulo é igual ao cosseno de seu complementar;

(b) o cosseno de um ângulo é igual ao seno de seu complementar;

(c) a tangente de um ângulo é igual à cotangente de seu complementar;

(d) a cotangente de um ângulo é igual à tangente de seu complementar;

(e) a secante de um ângulo é igual à cossecante de seu complementar;

(f) a cossecante de um ângulo é igual à secante de seu complementar.

Problema 7.22 *Os lados de um paralelogramo medem a e b e suas diagonais x e y. Mostre que*

$$x^2 + y^2 = 2(a^2 + b^2).$$

Problema Teórico 7.1 *Demonstre a Lei dos Senos (Figura 7.6).*

7.8 Respostas dos Problemas Propostos - Capítulo 7

- 7.1 (página 27)
  perímetro $= 4\sqrt{3}\,cm$ e área $= \frac{8\sqrt{3}}{3}\,cm^2$
- 7.2 (página 27)
  perímetro $= 12\sqrt{3}\,cm$ e área $= 27\,cm^2$
- 7.2 (página 27)
  $\sqrt{505}\,dm$
- 7.4 (página 27) $x = 4$ e $y = 2$
- 7.5 (página 28) $a = \frac{4\sqrt{6}}{3}$ e $x = \frac{16}{3}$
- 7.6 (página 28)

  (a) $2\sqrt{\sqrt{13} - 2}$; (c) $2\sqrt{\sqrt{13} - 2} + 7 + \sqrt{13}$;

  (b) $2 + \sqrt{13}$; (d) $6 + 3\sqrt{13}$.

- 7.7 (página 28) $\frac{18}{5}$ e $\frac{32}{5}$
- 7.8 (página 28) $6\,cm$
- 7.9 (página 28) $15\,cm$ e $20\,cm$
- 7.10 (página 28) perímetro $= 6+3\sqrt{2}$ e área $= 9$
- 7.11 (página 28) 30^o, 45^o e 105^o
- 7.12 (página 28)
  (a) $cos(\alpha) = 1$;
  (b) Não, pois teríamos um ângulo cujo seno é maior que 1.
- 7.13 (página 28) $600\,m$ de arame
- 7.14 (página 28) 60^o
- 7.15 (página 28) $\frac{d}{\sqrt{2-\sqrt{2}}}$
- 7.16 (página 28) $k = \frac{3}{2}$
- 7.17 (página 28)
  (a) $cos(\alpha) = \frac{4}{5}$, $tg(\alpha) = \frac{3}{4}$, $cotg(\alpha) = \frac{4}{3}$, $sec(\alpha) = \frac{5}{4}$, $csc(\alpha) = \frac{5}{3}$.
  (b) $sen(\beta) = \frac{4\sqrt{3}}{7}$, $tg(\beta) = 4\sqrt{3}$, $cotg(\beta) = \frac{\sqrt{3}}{12}$, $sec(\beta) = 7$, $sen(\beta) = \frac{7\sqrt{3}}{12}$.
  (c) $cos(\gamma) = \frac{\sqrt{17}}{17}$, $sen(\gamma) = \frac{16\sqrt{17}}{17}$, $cotg(\gamma) = \frac{1}{4}$, $sec(\gamma) = \sqrt{17}$, $csc(\gamma) = \frac{\sqrt{17}}{16}$.
  (d) $cos(\delta) = \frac{3\sqrt{10}}{10}$, $sen(\delta) = \frac{\sqrt{10}}{10}$, $tg(\delta) = \frac{1}{3}$, $sec(\alpha) = \frac{\sqrt{10}}{3}$, $csc(\alpha) = \sqrt{10}$.
  (e) $sen(\epsilon) = \frac{4}{5}$, $tg(\epsilon) = \frac{4}{3}$, $cotg(\epsilon) = \frac{3}{4}$, $sec(\epsilon) = \frac{5}{3}$, $csc(\epsilon) = \frac{5}{4}$.
  (f) $cos(\theta) = \frac{2\sqrt{5}}{5}$, $sen(\theta) = \frac{\sqrt{5}}{5}$, $cotg(\theta) = 2$, $sec(\theta) = \frac{\sqrt{5}}{2}$, $csc(\theta) = \sqrt{5}$.
  (g) $cos(\phi) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $sen(\phi) = \frac{1}{2}$, $tg(\phi) = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $cotg(\phi) = \sqrt{3}$, $sec(\phi) = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.
  (h) $cos(\sigma) = \frac{1}{3}$, $sen(\sigma) = \frac{2\sqrt{2}}{3}$, $tg(\sigma) = 2\sqrt{2}$, $cotg(\sigma) = \frac{\sqrt{2}}{4}$, $csc(\sigma) = \frac{3\sqrt{2}}{4}$.
- 7.18 (página 29)
  (a) $20\,m$
  (b) $20\sqrt{3}\,m$