Capítulo 3

Funções Polinomiais

3.1 Definição de Função Polinomial

Uma função polinomial $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de grau n é uma função da forma

$$y = f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0;$$

onde

- n é o grau do polinômio;
- $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_3, a_2, a_1, a_0$ são constantes reais ($a_n \neq 0$);
- x é a variável independente[1];
- $y = f(x)$ é a variável dependente.

3.2 Resultados Importantes

3.2.1 Identidade de Polinômios

Dois polinômios são ditos idênticos se os coeficientes das parcelas de mesma potência são todos iguais.

Exemplo 3.1 *Determine os valores de* m, n *e* p *para que os polinômios* $A(x) = (m+n)x^2 + 3nx - 4$ *e* $Q(x) = 2mx^2 - 6x + 4p$ *sejam idênticos.*

Solução: comparando-se as parcelas de mesma potência temos o sistema

$$\begin{cases} m + n & = & 2m \\ 3n & = & -6 \\ 4p & = & -4 \end{cases}$$

cuja solução é $m = -2$, $n = -2$ *e* $p = -1$ *(verifique!).*

3.2.2 Polinômio Identicamente Nulo

O polinômio identicamente nulo é aquele no qual todos os coeficientes são nulos, ou seja,

$$y = f(x) = 0x^n + 0x^{n-1} + \ldots + 0x^3 + 0x^2 + 0x + 0 = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Qual o grau de um polinômio identicamente nulo? o que você quiser (sinistro não?).

[1] O domínio de toda função polinomial é $\mathbb{R}$.

3.2.3 Teorema do Resto

A divisão do polinômio P pelo fator linear $(x-r)$ é igual a $P(r)$.

Exemplo 3.2 *Determine o valor de m de modo que a divisão do polinômio $f(x) = (m-4)x^3 - mx^2 - 3$ por $g(x) = x-2$ dê resto 5.*

Solução: pelo Teorema do Resto devemos ter $f(2) = 5$; logo

$$\begin{aligned} f(2) = 8(m-4) - 4m - 3 &= 5 \\ 4m &= 40 \\ m &= 10. \end{aligned}$$

3.2.4 Teorema de D'Alembert

Se um polinômio P é divisível por $(x-r)$ então $P(r) = 0$, ou seja, r é uma raiz de P. Generalizando o Teorema de D'Alembert temos que, se P é divisível pelos fatores lineares $(x-r_1)$, $(x-r_2)$,..., $(x-r_n)$, então P também é divisível pelo produto

$$(x-r_1)(x-r_2)\dots(x-r_n).$$

Além disto os números $r_1, r_2, \dots, r_n$ são todos raízes de P.

3.2.5 Teorema Fundamental da Álgebra - TFA

Todo polinômio de grau n possui n raízes. No TFA devemos considerar:

- a existência de raízes complexas;
- a existência de raízes múltiplas (repetidas).

3.2.6 Forma Fatorada de um Polinômio

A importância do TFA é que ele garante que todo polinômio P de grau n pode ser escrito na forma fatorada

$$P(x) = (x-r_1)(x-r_2)(x-r_3)\dots(x-r_n)$$

onde os números $r_1, r_2, r_3, \dots, r_n$ são suas raízes (mais uma vez: podem existir raízes complexas e/ou múltiplas). Evidentemente que para escrevermos um polinômio na forma fatorada devemos inicialmente determinar suas raízes; para polinômios de grau maior que 2 isto nem sempre é uma tarefa simples[2].

Exemplo 3.3 *As raízes do polinômio $P(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$ são $x = 0$, $x = 1$ e $x = 2$ (verifique). Logo sua forma fatorada é*

$$P(x) = (x-0)(x-1)(x-2) = x(x-1)(x-2).$$

Exemplo 3.4 *As raízes do polinômio $P(x) = x^4 + 3x^3 - 25x^2 - 39x + 180$ são $x = -5$, $x = -4$, $x = 3$ e $x = 3$ (verifique). Logo sua forma fatorada é (observe que 3 é uma raiz dupla)*

$$P(x) = (x+5)(x+4)(x-3)(x-3) = (x+5)(x+4)(x-3)^2.$$

3.3 Problemas Propostos

Problema 3.1 *Determine todos os valores de k para que o polinômio*

$$P(x) = (k^2 - k - 6)x^3 - (k-3)x^2 + kx - 2$$

[2] Visite o site www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/history/HistTopics/Quadratic_etc_equations.html pra uma discussão sobre a determinação exata das raízes de polinômios cúbicos (Método de Tartaglia) e quárticos (Método de Ferrari) por métodos algébricos (métodos que envolvem apenas adição, subtração multiplicação, divisão e raízes de expressões nos coeficientes do polinômio).

(a) *seja de grau* 1;

(b) *seja de grau* 2.

Problema 3.2 (Mack-SP) *Para quais valores de* m *o polinômio* $P(x) = (m-4)x^3+(m^2-16)x^2+(m+4)x+4$ *é de grau* 2?

Problema 3.3 *Dados* $A(x) = x^2 + 3x + 1$, $B(x) = -2x^2 + x - 1$ *e* $C(x) = x^3 - x + 1$, *determine:*

(a) $P(x) = (2A + B)^2 - 4C$;

(b) $Q(x) = (B - A)^2 - 2(B + C)$.

Problema 3.4 (FGV-SP) *Sabe-se que em um polinômio* P *do* 3^o *o coeficiente de* x^3 *é* 1, *duas de suas raízes são* 1 *e* 2 *e que* $P(3) = 30$. *Determine* $P(-1)$.

Problema 3.5 (Fuvest-SP) *Sabe-se que um polinômio* $P(x) = x^3+ax^2+bx+c$ *tem as seguintes propriedades:* $P(1) = 0$ *e* $P(-x) + P(x) = 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$. *Determine* $P(2)$.

Problema 3.6 *Determine as constantes* A, B *e* C *na identidade*

$$A(x^2 - x + 1) + (Bx + C)(x + 1)) = 1.$$

Problema 3.7 *Determine as constantes* α, β, γ *e* δ *para que os polinômios* $P(x) = \alpha(x + \gamma)^3 + \beta(x + \delta)$ *e* $Q(x) = x^3 + 6x^2 + 15x + 14$ *sejam idênticos.*

Problema 3.8 (PUC-SP) *Determine as constantes* m, n *e* p *para que os polinômios* $P(x) = (m+n+p)x^4 - (p+1)x^3 + mx^2 + (n-p)x + n$ *e* $Q(x) = 2mx^3 + (2p+7)x^2 + 5mx + 2m$ *sejam idênticos.*

Problema 3.9 *Determine* m *e* n *para que o polinômio* $f(x) = x^3 + 12x^2 + mx + n$ *seja um cubo perfeito*[3].

Problema 3.10 *Determine o quociente* Q *e o resto* R *da divisão do polinômio* $f(x) = x^3 - 7x^2 - x + 8$ *pelo polinômio* $g(x) = x^2 - 4$.

Problema 3.11 *Em uma divisão de polinômios, o divisor é* $Q(x) = x^3 - x^2 + 3$, *o quociente é* $q(x) = x + 2$ *e o resto é* $R(x) = x^2 - 9$. *Determine o dividendo.*

Problema 3.12 *Em uma divisão de polinômios, o dividendo é* $P(x) = x^4 - 2x^2 + x - 7$, *o quociente é* $q(x) = x^2 + x - 1$ *e o resto é* $R(x) = -7$. *Determine o divisor.*

Problema 3.13 *Determine as constantes* α *e* β *para que o polinômio* $P(x) = x^4+\alpha x^3+\beta x^2+2x$ *seja divisível pelo polinômio* $Q(x) = x^2 + 1$.

Problema 3.14 *Determine o valor de* m *para que o polinômio* $P(x) = (m^2-1)x^2+2mx-1$ *seja divisível pelo polinômio* $Q(x) = 2x - 1$.

Problema 3.15 (ITA-SP) *Um polinômio* P *divido por* $x - 1$ *dá resto* 3. *O quociente desta divisão é então dividido por* $x - 2$, *obtendo-se resto* 2. *Determine o resto da divisão de* P *por* $(x - 1)(x - 2)$.

Problema 3.16 *Sabe-se que o polinômio* $P(x) = x^3+2x^2-9x-18$ *é divisível pelo fator linear* $x+2$. *Determine todas as raízes de* P *e reescreva-o na forma fatorada.*

Problema 3.17 *Dado a função polinomial* $P(x) = x^4 - 8x^2 - 9$ *determine suas raízes e reescreva-a na forma fatorada.*

Problema 3.18 *Sabendo-se que* 2 *é uma raiz dupla da função polinomial* $P(x) = x^5 - 2x^4 - 3x^3 + 4x^2 + 4x$, *determine suas outras* 3 *raízes e reescreva-a na forma fatorada.*

Problema 3.19 (ESAN-SP) *Seja* $P(x) = Q(x) + x^2 + x + 1$. *Sabendo-se que* 2 *é raiz de* P *e* 1 *é raiz de* Q *determine* $P(1) - Q(2)$.

Problema 3.20 (UFMG) *Os polinômios* $P(x) = px^2 + q(x) - 4$ *e* $Q(x) = x^2 + px + q$ *são tais que* $P(x+1) = Q(2x),\ \forall x \in \mathbb{R}$. *Determine* p *e* q.

Problema 3.21 (UFES) *Seja* f *é um polinômio tal que a soma de seus coeficientes é zero. Determine f(1).*

Problema 3.22 (ITA-SP) *Sejam* a, b *e* c *números reais que nesta ordem formam uma progressão aritmética de soma* 12. *Sabendo-se que os restos das divisões de* $P(x) = x^{10} + 8x^8 + ax^5 + bx^3 + cx$ *por* $x - 2$ *e* $x + 2$ *são iguais, determine a razão da progessão aritmética.*

[3] Isto é, para que f seja da forma $f(x) = (ax + b)^3$

3.4 Problemas Teóricos

Problema Teórico 3.1 *Para todo $n \in \mathbb{N}^*$ a expressão $(x+4)^n+(x+3)^{2n}-1$ define formalmente um polinômio em x. Mostre que qualquer polinômio assim obtido é divisível pelo produto $(x+3)(x+4)$.*

3.5 Respostas dos Problemas Propostos - Capítulo 3

- 3.1 (página 10)
  - (a) $k = 3$;
  - (b) $k = -2$.
- 3.2 (página 10) para nenhum m.
- 3.3 (página 11)
  - (a) $P(x) = -4x^3 + 49x^2 + 18x - 3$;
  - (b) $Q(x) = 9x^4 + 10x^3 + 20x^2 + 8x + 4$.
- 3.4 (página 11) $P(-1) = 66$.
- 3.5 (página 11) $P(2) = 6$.
- 3.6 (página 11) $A = \frac{1}{3}$, $B = -\frac{1}{3}$, $C = \frac{2}{3}$.
- 3.7 (página 11) $\alpha = 1$, $\beta = 3$, $\gamma = \delta = 2$.
- 3.8 (página 11) $m = 1$, $n = 2$ e $p = -3$.
- 3.9 (página 11) $m = 48$ e $n = 64$.
- 3.10 (página 11) $Q(x) = x - 7$ e $R(x) = 3x - 20$.
- 3.11 (página 11) $P(x) = x^4 + x^3 - x^2 + 3x - 3$
- 3.12 (página 11) $Q(x) = x^2 - x$.
- 3.13 (página 11) $\alpha = 2$ e $\beta = 1$.
- 3.14 (página 11) $m = -5$ ou $m = 1$
- 3.15 (página 11) $2x + 1$
- 3.16 (página 11) $x = -3$, $x = -2$, $x = 3$; $P(x) = (x+3)(x+2)(x-3)$.
- 3.17 (página 11) $x = \pm 3$ e $x = \pm i$; $P(x) = (x+3)(x-3)(x+i)(x-i)$.
- 3.18 (página 11) $x = 0$ (raiz simples), $x = -1$ (raiz dupla); $P(x) = x(x+1)^2(x-2)^2$.
- 3.19 (página 11) $P(1) - Q(2) = 10$
- 3.20 (página 11) $p = 4$ e $q = 0$.
- 3.21 (página 11) $f(1) = 0$.
- 3.22 (página 11) $\frac{28}{5}$