Capítulo 1

Relações e Funções

1.1 Definições Preliminares

Definição 1 (Produto Cartesiano) *Dados os conjuntos A e B, o produto cartesiano de A por B, denotado $A \times B$ (lê-se: A cartesiano B), é o conjunto formado por* ***todos*** *os pares ordenados (a, b), onde $a \in A$ e $b \in B$, isto é*

$$A \times B = \big\{(a, b) \,|\, \forall\, a \in A, \forall\, b \in B\big\}$$

Exemplo 1.1 *Dados os conjuntos $A = \big\{1, 3, 5\big\}$ e $B = \big\{2, 3\big\}$, temos*

$$\begin{aligned} A \times B &= \big\{(1,2); (1,3); (3,2); (3,3); (5,2); (5,3)\big\} \\ B \times A &= \big\{(2,1); (2,3); (2,5); (3,1); (3,3); (3,5)\big\} \\ A \times A = A^2 &= \big\{(1,1); (1,3); (1,5); (3,1); (3,3); (3,5); (5,1); (5,3); (5,5)\big\} \\ B \times B = B^2 &= \big\{(2,2); (2,3); (3,2); (3,3)\big\} \end{aligned}$$

Definição 2 (Relação) *Dados os conjuntos A e B, uma relação R de A em B, denotada $R : A \to B$ (lê-se: R de A em B), é qualquer subconjunto do produto cartesiano $A \times B$*

Exemplo 1.2 *Dados os conjuntos $A = \big\{1, 3, 5, 7\big\}$ e $B = \big\{3, 9, 15, 20\big\}$, a relação $R : A \to B$, tal que*

$$R = \big\{(a, b) \,|\, b = 3a\big\},$$

é dada explicitamente pelos pares ordenados $R = \big\{(1, 3); (3, 9); (5, 15)\big\}$. Uma outra maneira de se representar uma relação é através do diagrama de Venn (Figura 1.1).

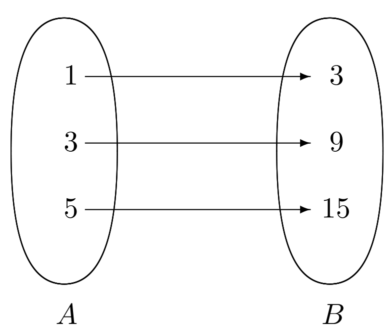


Figura 1.1: Representação de uma relação por diagrama de Venn.

Domínio e Imagem de uma Relação

O domínio de uma relação R, denotado $D(R)$, é o conjunto formado pelos primeiros elementos de cada par ordenado da relação. No Exemplo 1.2 o domínio é o conjunto $D(R) = \{1, 3, 5\}$.

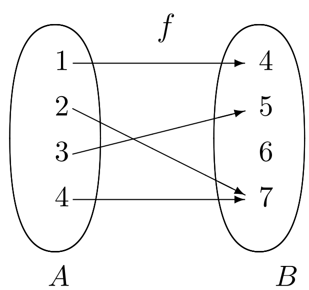
A imagem de uma relação R, denotada $I(R)$, é o conjunto formado pelos segundos elementos de cada par ordenado da relação. No Exemplo 1.2 a imagem é o conjunto $D(R) = \{3, 9, 15\}$.

Definição 3 (Função) *Dados os conjuntos A e B, uma função f de A em B, denotada $f : A \to B$ (lê-se: f de A em B), é qualquer relação que associa a **todo** elemento de A um **único** elemento de B.*

Domínio, Contra-Domínio e Imagem de uma função

Em uma função $f : A \to B$ o domínio é o conjunto A e o contra-domínio é o conjunto B. A imagem de f é o subconjunto de B cujos elementos estão associados a algum elemento do domínio. Genericamente denotamos os pares ordenados de f por (x, y), onde $x \in A$ e $y \in B$, e escrevemos $y = f(x)$ (lê-se f de x é igual a y). Dizemos que y é a imagem de x sob a função f. Dizemos também que x é a variável independente e que y é a variável dependente. O Exemplo 1.3 ilustra tais conceitos.

Exemplo 1.3 *Dados os conjuntos $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e $B = \{4, 5, 6, 7\}$, a relação mostrada na figura a seguir define uma função $f : A \to B$.*



Nesta função temos:

- *domínio: $D(f) = \{1, 2, 3, 4\}$;*
- *contra-domínio: $CD(f) = \{4, 5, 6, 7\}$;*
- *imagem: $I(f) = \{4, 5, 7\}$;*
- *$f(1) = 4$ (lê-se f de 1 é igual a 4), ou seja, 4 é a imagem de 1;*
- *$f(2) = 7$, $f(3) = 5$ e $f(4) = 7$.*

1.2 Problemas Propostos

Problema 1.1 *Dados os conjuntos $A = \{3, 5, 7\}$ e $B = \{3, 9, 15, 35\}$*

(a) determine $A \times B$; *(b) determine $B \times A$;* *(c) determine $A^2 = A \times A$;*

Problema 1.2 *Dados os conjuntos $A = \{-2, -1, 0, 1\}$ e $B = \{0, 1, 2, 3\}$*

(a) determine a relação $R_1 = \{(a, b) \in A \times B \mid b = a^2 - 1\}$;

(b) determine a relação $R_2 = \{(a,b) \in A^2 \mid b = a^2\}$*;*

(c) determine a relação $R_3 = \{(a,b) \in B \times A \mid b = a^2\}$*;*

(d) determine o domínio e a imagem de cada relação.

Problema 1.3 *Dados os conjuntos* $A = \{3, 5, 7\}$ *e* $B = \{3, 9, 15, 35\}$

(a) determine a relação $R : A \to B$*, tal que* $R = \{(a,b) \mid a \text{ é divisor de } b\}$*;*

(b) determine o domínio e a imagem de R*.*

Problema 1.4 *Dados os conjuntos* $A = \{1, 2, 7, 10\}$ *e* $B = \{2, 5, 33, 50, 101\}$

(a) determine a relação $R_1 : A \to B$*, tal que* $R_1 = \{(a,b) \mid a \text{ e } b \text{ são primos}\}$*;*

(b) determine a relação $R_2 : A \to B$*, tal que* $R_2 = \{(a,b) \mid b = a^2 + 1\}$*;*

(c) A relação R_1 *é uma função? Explique. Caso seja determine sua imagem.*

(d) A relação R_2 *é uma função? Explique. Caso seja determine sua imagem.*

Problema 1.5 *Dados os conjuntos* $A = \{3, 8, 15, 24\}$ *e* $B = \{2, 3, 4, 5\}$

(a) determine a relação $R_1 : A \to B$*, tal que* $R_1 = \{(a,b) \mid b = \sqrt{a+1}\}$*;*

(b) determine a relação $R_2 : B \to A$*, tal que* $R_2 = \{(b,a) \mid a = b - 1\}$*;*

(c) A relação R_1 *é uma função? Explique. Caso seja determine sua imagem.*

(d) A relação R_2 *é uma função? Explique. Caso seja determine sua imagem.*