Capítulo 1

Trigonometria

1.1 Conceitos preliminares

O número π

Dada uma circunferência de raio r, diâmetro $d = 2r$, o número π é definido como a razão do comprimento C da circunfeência pelo seu diâmetro d, isto é,

$$\pi = \frac{C}{d} = \frac{C}{2r} \tag{1.1}$$

O comprimento de uma circunferência

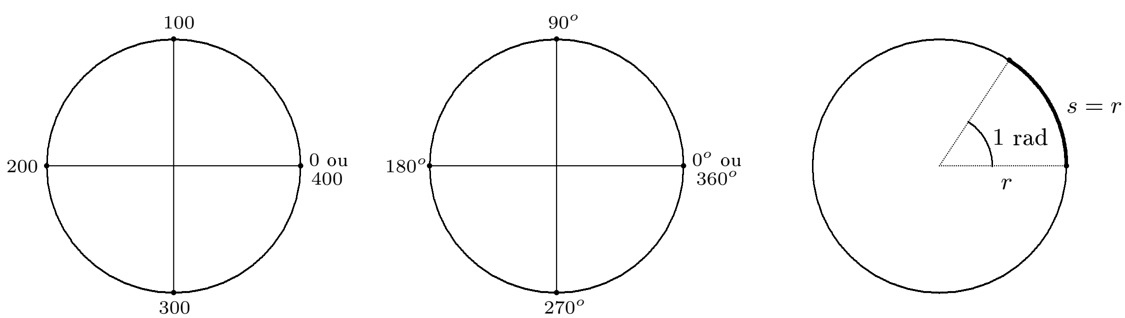
Pela definição do número π na equação (1.1) observamos que o comprimento da circunferência é dado por

$$C = \pi\, d = 2\,\pi\, r \tag{1.2}$$

Medida de ângulos

Existem 3 unidades para a medida de ângulos.

- Grado: 1 grado é um ângulo correspondente a $\frac{1}{400}$ de uma volta completa da circunferência. Conseqüentemente, a volta completa na circunferência compreende um ângulo de 400 grados - Figura 1.1(a).
- Grau: 1 grau, denotado 1^o, é um ângulo correspondente a $\frac{1}{360}$ de uma volta completa da circunferência. Conseqüentemente, a volta completa na circunferência compreende um ângulo de 360^o - Figura 1.1(b).
- Radiano: 1 radiano, denotado 1 rad, é um ângulo correspondente a um arco de mesmo comprimento do raio da circunferência - Figura 1.1(c).



(a) A definição de grado (b) A definição de grau (c) A definição de radiano

Figura 1.1: Medidas de ângulo

O comprimentro de um arco

Em uma circunferência de raio r a definição de radiano implica que um ângulo de 1 radiano compreende um arco de comprimento r. Logo um ângulo de θ radianos compreende um arco de comprimento s - Figura 1.2(a). O valor s é dado por

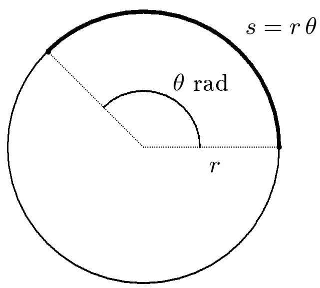
$$\frac{1\ \text{rad}}{r} = \frac{\theta\ \text{rad}}{s} \quad \therefore \quad s = r\,\theta$$

Conversão grau-radiano

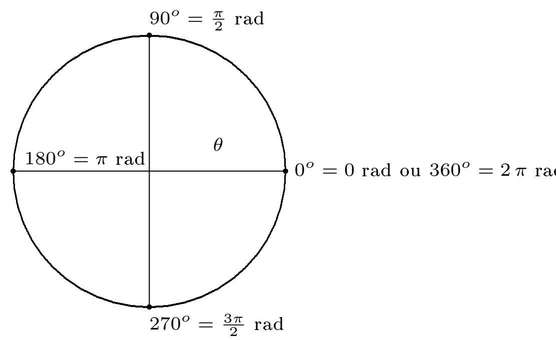
De modo análogo, um arco de comprimento r compreende um ângulo de 1 radiano. A circunferência completa, um arco de comprimento $2\,\pi\,r$, compreende um ângulo θ dado por

$$\frac{r}{1\ \text{rad}} = \frac{2\,\pi\,r}{\theta\ \text{rad}} \quad \therefore \quad \theta = 2\,\pi\ \text{rad}$$

Isto é, uma volta completa na circunferência corresponde a um ângulo de medida $2\,\pi$ radianos - Figura 1.2(b).



(a) Comprimento de arco



(b) Conversão grau-radiano

Figura 1.2: Comprimento de arco e a conversão grau-radiano

Assim, dado um ângulo θ radianos, sua medida x em graus é dada por

$$\frac{\pi\ \text{rad}}{180^o} = \frac{\theta\ \text{rad}}{x} \quad \therefore \quad x = \frac{180}{\pi}\,\theta$$

Exemplo 1.1 *Determine a medida do ângulo* $\frac{3}{4}\pi$ *rad em graus.*

$$\frac{\pi\ rad}{180^o} = \frac{\frac{3}{4}\pi\ rad}{x} \quad \therefore \quad x = \frac{180}{\pi}\,\frac{3}{4}\pi = 135^o$$

Exemplo 1.2 *Determine a medida do ângulo* 155^o *em radianos.*

$$\frac{\pi\ rad}{180^o} = \frac{x\ rad}{155^o} \quad \therefore \quad x = \frac{155}{180}\,\pi = \frac{31}{35}\,\pi\ rad$$

Classificação de triângulos

Triângulo é um polígono com 3 ângulos internos, logo 3 lados. Podemos classificá-los de duas maneiras:

- quanto aos tamanhos dos lados:
  - equilátero - 3 lados de mesmo comprimento,
  - isóceles - 2 lados de mesmo comprimento,
  - escaleno - 3 lados de comprimentos diferentes;

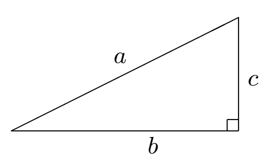
- quanto às medidas dos ângulos:
    - acutângulo - 3 ângulos agudos (menores que 90^o graus),
    - retângulo - 1 ângulo reto (90^o graus),
    - obtusângulo - 1 ângulo obtuso (maior que 90^o graus).

1.2 Triângulo retângulo

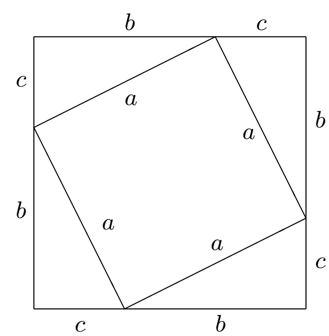
1.2.1 Teorema de Pitágoras

Em um triângulo retângulo, Figura 1.3(a), os lados que formam o ângulo reto são denominados catetos e o lado oposto ao ângulo reto é chamado hipotenusa. Os comprimentos da hipotenusa e dos catetos estão relacionados pelo Teorema de Pitágoras

$$a^2 = b^2 + c^2. \tag{1.3}$$



(a) Um triângulo retângulo.



(b) O Teorema de Pitágoras.

Figura 1.3: Triângulo retângulo e o Teorema de Pitágoras.

Uma prova bastante simples do Teorema de Pitágoras pode ser obtida através da Figura 1.3(b): a área do quadrado externo é igual à soma da área do quadrado interno mais a área dos 4 triângulos retângulos, isto é:

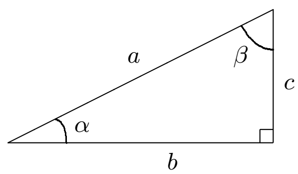
$$a^2 + 4\frac{bc}{2} = (b+c)^2 \;\therefore\; a^2 + 2bc = b^2 + 2bc + c^2 \;\therefore\; a^2 = b^2 + c^2.$$

1.2.2 Razões trigonométricas no triângulo retângulo

Para cada ângulo agudo de um triângulo retângulo define-se 6 razões trigonométricas (conhecidas como seno, cosseno, tangente, cotangente, secante e cossecante) da seguinte maneira

- seno $= \frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}}$
- tangente $= \frac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adjacente}}$
- secante $= \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto adjacente}}$
- cosseno $= \frac{\text{cateto adjacente}}{\text{hipotenusa}}$
- cotangente $= \frac{\text{cateto adjacente}}{\text{cateto oposto}}$
- cossecante $= \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto oposto}}$

A Figura 1.4 ilustra as 6 razões trigonométricas para os ângulos α e β de um triângulo retângulo.



seno:	$sen(\alpha) = \frac{c}{a}$	$sen(\beta) = \frac{b}{a}$
cosseno:	$cos(\alpha) = \frac{b}{a}$	$cos(\beta) = \frac{c}{a}$
tangente:	$tg(\alpha) = \frac{c}{b}$	$tg(\beta) = \frac{b}{c}$
cotangente:	$ctg(\alpha) = \frac{b}{c}$	$ctg(\beta) = \frac{c}{b}$
secante:	$sec(\alpha) = \frac{a}{b}$	$sec(\beta) = \frac{a}{c}$
cossecante:	$csc(\alpha) = \frac{a}{c}$	$csc(\beta) = \frac{a}{b}$

Figura 1.4: As razões trigonométricas.

Razões trigonométricas de alguns ângulos notáveis

Na Figura 1.5(a) traçamos a diagonal de um quadrado de lado a e então determinamos as razões trigonométricas para o ângulo de 45^o obtido:

$$cos(45^o) = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad , \quad sen(45^o) = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad , \quad tg(45^o) = \frac{a}{a} = 1.$$

Na Figura 1.5(b) traçamos a altura de um triângulo equilátero de lado a e então determinamos as razões trigonométricas para os ângulos de 30^o e 60^o obtidos:

$$cos(30^o) = \frac{a\sqrt{3}/2}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad , \quad sen(30^o) = \frac{a/2}{a} = \frac{1}{2} \quad , \quad tg(30^o) = \frac{a/2}{a\sqrt{3}/2} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

$$cos(60^o) = \frac{a/2}{a} = \frac{1}{2} \quad , \quad sen(60^o) = \frac{a\sqrt{3}/2}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad , \quad tg(60^o) = \frac{a\sqrt{3}/2}{a/2} = \sqrt{3}.$$

A tabela 1.1 resume estes resutados.

ângulo	30^o	45^o	60^o
sen	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tg	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

Tabela 1.1: Valores de seno, cosseno e tangente dos ângulos 30^o, 45^o e 60^o.

1.3 Algumas identidades trigonométricas

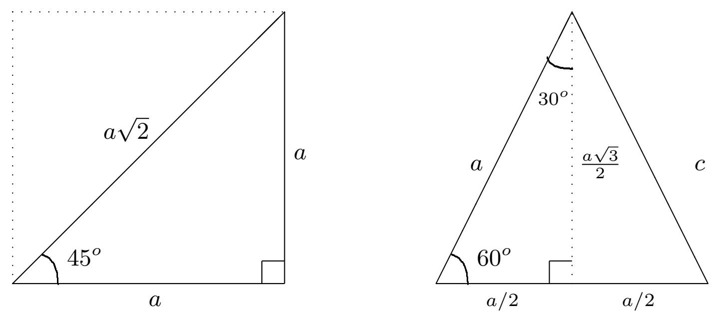
Na Figura 1.4 temos que $b = a\,cos(\alpha)$ e $c = a\,sen(\alpha)$; obtemos então as seguintes identidades:

$$tg(\alpha) = \frac{c}{b} = \frac{a\,sen(\alpha)}{a\,cos(\alpha)} \therefore tg(\alpha) = \frac{sen(\alpha)}{cos(\alpha)} \tag{1.4a}$$

$$cotg(\alpha) = \frac{b}{c} = \frac{a\,cos(\alpha)}{a\,sen(\alpha)} \therefore cotg(\alpha) = \frac{cos(\alpha)}{sen(\alpha)} \tag{1.4b}$$

$$sec(\alpha) = \frac{a}{b} = \frac{a}{a\,cos(\alpha)} \therefore sec(\alpha) = \frac{1}{cos(\alpha)} \tag{1.4c}$$

$$csc(\alpha) = \frac{a}{c} = \frac{a}{a\,sen(\alpha)} \therefore csc(\alpha) = \frac{1}{sen(\alpha)} \tag{1.4d}$$



(a) Ângulo de 45^o.

(b) Ângulos de 30^o e 60^o.

Figura 1.5: Ângulos notáveis.

Usando o Teorema de Pitágoras obtemos

$$b^2 + c^2 = a^2 \;\therefore\; a^2\, cos^2(\alpha) + a^2\, sen^2(\alpha) = a^2 \;\therefore\; a^2\big[cos^2(\alpha) + sen^2(\alpha)\big] = a^2$$

donde

$$cos^2(\alpha) + sen^2(\alpha) = 1 \tag{1.4e}$$

A identidade (1.4e) é chamada de identidade fundamental: o quadrado do cosseno mais o quadrado do seno de qualquer ângulo é sempre igual a um. A partir da identidade fundamental obtemos outras duas importantes identidades:

$$\frac{cos^2(\alpha) + sen^2(\alpha)}{cos^2(\alpha)} = \frac{1}{cos^2(\alpha)} \;\therefore\; 1 + \frac{sen^2(\alpha)}{cos^2(\alpha)} = \frac{1}{cos^2(\alpha)} \;\therefore\; 1 + tg^2(\alpha) = sec^2(\alpha) \tag{1.4f}$$

$$\frac{cos^2(\alpha) + sen^2(\alpha)}{sen^2(\alpha)} = \frac{1}{sen^2(\alpha)} \;\therefore\; \frac{cos^2(\alpha)}{sen^2(\alpha)} + 1 = \frac{1}{sen^2(\alpha)} \;\therefore\; cotg^2(\alpha) + 1 = csc^2(\alpha) \tag{1.4g}$$

Exemplo 1.3 *Para um dado ângulo θ sabe-se que $cos(\theta) = \frac{1}{5}$. Determine as outras razões trigonométricas para θ.*
Da identidade fundamental obtemos

$$\left(\frac{1}{5}\right)^2 + sen^2(\theta) = 1 \quad\therefore\quad sen^2(\theta) = 1 - \frac{1}{25} \quad\therefore\quad sen(\theta) = \sqrt{\frac{24}{25}} = \frac{2\sqrt{6}}{5}.$$

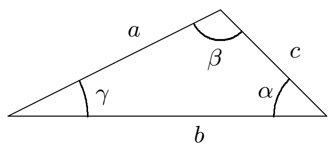
Logo:

- *pela identidade* (1.4a)*:* $tg(\theta) = \frac{2\sqrt{6}/5}{1/5} = \frac{2\sqrt{6}}{5}\,\frac{5}{1} = 2\sqrt{6}$;
- *pela identidade* (1.4b)*:* $cotg(\theta) = \frac{1/5}{2\sqrt{6}/5} = \frac{1}{5}\,\frac{5}{2\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{12}$;
- *pela identidade* (1.4c)*:* $sec(\theta) = \frac{1}{1/5} = 5$;
- *pela identidade* (1.4d)*:* $csc(\theta) = \frac{1}{2\sqrt{6}/5} = \frac{5}{2\sqrt{6}}$.

1.4 Triângulos quaisquer

1.4.1 A Lei dos Cossenos

Vimos que para triângulos retângulos as medidas dos lados estão relacionados pelo Teorema de Pitágoras. Para triângulos quaisquer os comprimentos dos lados estão relacionados pela Lei dos Cossenos (Figura 1.6).



Para o ângulo α:	$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\,cos(\alpha)$
Para o ângulo β:	$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\,cos(\beta)$
Para o ângulo γ:	$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\,cos(\gamma)$

Figura 1.6: A Lei dos Cossenos.

A demostração da Lei dos Cossenos para o ângulo γ pode ser obtida a partir da Figura 1.7. No triângulo retângulo da esquerda temos

$$cos(\gamma) = \frac{x}{a} \ \therefore\ x = acos(\gamma) \tag{1.5a}$$

$$a^2 = x^2 + H^2 \ \therefore\ H^2 = a^2 - x^2. \tag{1.5b}$$

No triângulo retângulo da direita temos

$$c^2 = H^2 + (b-x)^2 = H^2 + b^2 - 2bx + x^2 \tag{1.5c}$$

Substituindo (1.5a) e (1.5b) em (1.5c) obtemos

$$\begin{aligned} c^2 &= a^2 - x^2 + b^2 - 2ab\,cos(\gamma) + x^2 \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab\,cos(\gamma) \end{aligned}$$

que é a Lei dos Cossenos para o ângulo γ.

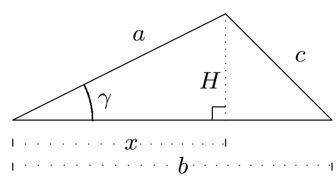
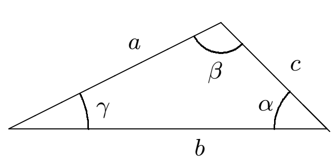


Figura 1.7: A demostração da Lei dos Cossenos para o ângulo γ.

1.4.2 A Lei dos Senos

Outra relação entre os comprimentos dos lados e os ângulos de um triângulo qualquer é a Lei dos Senos (Figura 1.8), cuja demonstração fica a cargo do leitor (Problema Teórico 1.1).



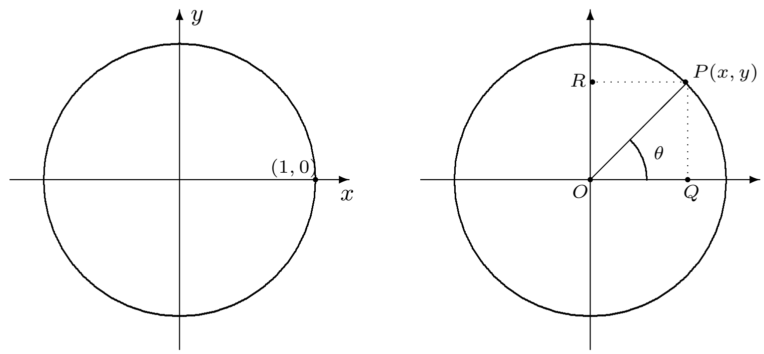
$$\frac{sen(\beta)}{b} = \frac{sen(\alpha)}{a} = \frac{sen(\gamma)}{c}$$

Figura 1.8: A Lei dos Senos.

1.5 Círculo Trigonométrico e Funções Circulares

Círculo trigonométrico é o circulo[1] de raio unitário e centro na origem do sistema cartesiano - Figura 1.9(a).

[1]Um termo mais apropriado seria circunferência trigonométrica, mas o termo círculo trigonométrico é tradicionalmente utilizado na literatura e vamos mantê-lo.



(a) O circulo trigonométrico (b) Seno e cosseno

Figura 1.9: O seno e o cosseno no círculo trigonométrico

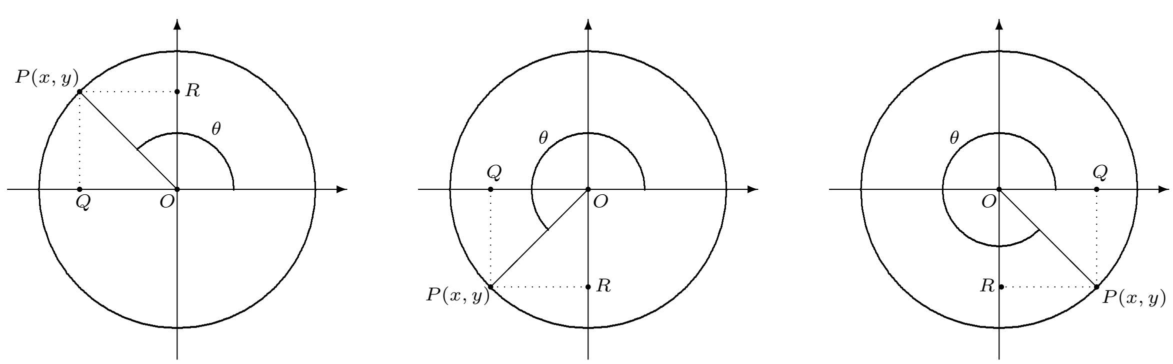
No triângulo OPQ da Figura 1.9(b) (lembrando que $\overline{OP} = 1$) observamos que

$$cos(\theta) = \overline{OQ}/\overline{OP} = x/1 = x \quad \text{e} \quad sen(\theta) = \overline{PQ}/\overline{OP} = \overline{OR}/\overline{OP} = y/1 = y,$$

de modo que as coordenadas cartesianas do ponto P são dadas por

$$P = (x, y) = \Big(cos(\theta), sen(\theta)\Big).$$

Raciocinando no sentido inverso, seja $P(x, y)$ um ponto qualquer sobre o círculo unitário e θ o ângulo correspondente, medido no sentido anti-horário a partir do semi-eixo positivo das abscissas. Definimos o cosseno deste ângulo como o valor da abscissa de P e seu seno como o valor da ordenada de P. Esta definição do seno e cosseno no círculo trigonométrico nos permite calcular os valores das razões trigonométricas para ângulos dados por qualquer número real, e não apenas para ângulos agudos como no caso de triângulos retângulos. A Figura 1.10 ilustra este raciocínio para ângulos no segundo, terceiro e quarto quadrantes.



(a) Ângulo no 2^o quadrante (b) Ângulo no 3^o quadrante (c) Ângulo no 4^o quadrante

Figura 1.10: $cos(\theta) = \overline{OQ} = x$ e $sen(\theta) = \overline{OR} = y$.

Sinal do seno e cosseno

- se $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ então $sen(\theta) > 0$ e $cos(\theta) > 0$ - Figura 1.9(b);
- se $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ então $sen(\theta) > 0$ e $cos(\theta) < 0$ - Figura 1.10(a);

- se $\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$ então $sen(\theta) < 0$ e $cos(\theta) < 0$ - Figura 1.10(b);
- se $\frac{3\pi}{2} < \theta < 2\pi$ então $sen(\theta) < 0$ e $cos(\theta) > 0$ - Figura 1.10(c).

1.5.1 As funções circulares

A função seno

Seja x um ângulo variável no círculo trigonométrico. A cada valor de x associamos um único valor para seu seno, denotado $sen(x)$. Definimos então a função $f(x) = sen(x)$, cujo gráfico, chamado senóide, é mostrado na Figura 1.11.

A Figura 1.11 exibe duas propriedades importantes da função $sen(x)$:

- é periódica de período $T = 2\pi$; isto significa que suas imagens se repetem de 2π em 2π radianos, isto é, $\forall\, x \in \mathbb{R}$ temos que $sen(x) = sen(x + 2\pi)$;
- é limitada entre -1 e 1, isto é, $\forall\, x \in \mathbb{R}$ temos que $-1 \leq sen(x) \leq 1$.

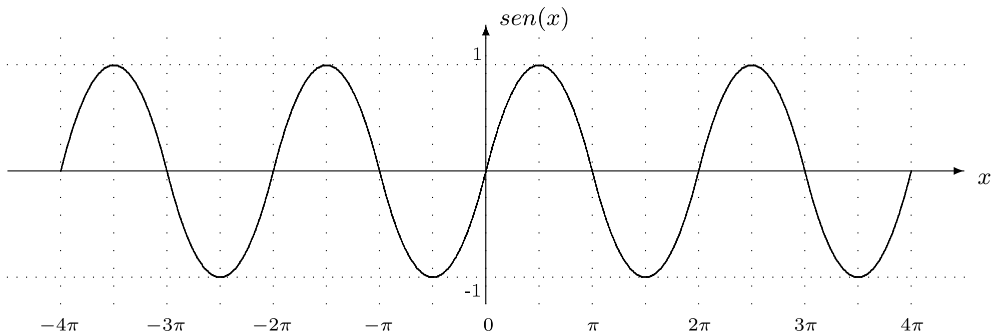


Figura 1.11: Senóide $sen(x)$

A função cosseno

De modo análogo ao seno, seja x um ângulo variável no círculo trigonométrico. A cada valor de x associamos um único valor para seu cosseno, denotado $cos(x)$. Definimos então a função $f(x) = cos(x)$, cujo gráfico é mostrado na Figura 1.12.

A Figura 1.12 exibe duas propriedades importantes da função $cos(x)$:

- é periódica de período $T = 2\pi$; isto significa que suas imagens se repetem de 2π em 2π radianos, isto é, $\forall\, x \in \mathbb{R}$ temos que $cos(x) = cos(x + 2\pi)$;
- é limitada entre -1 e 1, isto é, $\forall\, x \in \mathbb{R}$ temos que $-1 \leq cos(x) \leq 1$.

1.6 Mais identidades trigonométricas

Simetrias

As identidades de simetria estabelecem o efeito da substituição de α por $-\alpha$. Pela Figura 1.13 temos

$$sen(\alpha) = \overline{QR} = -\overline{QS} = -sen(-\alpha) \quad \therefore \quad sen(\alpha) = -sen(-\alpha). \tag{1.6a}$$

$$cos(\alpha) = \overline{OQ} = cos(-\alpha) \quad \therefore \quad cos(\alpha) = cos(-\alpha). \tag{1.6b}$$

Estas identidades também podem ser facilmente observadas nas Figuras 1.11 e 1.12 respectivamente. Finalmente

$$tg(\alpha) = \frac{sen(\alpha)}{cos(\alpha)} = \frac{-sen(-\alpha)}{cos(-\alpha)} = -tg(-\alpha) \quad \therefore \quad tg(\alpha) = -tg(-\alpha). \tag{1.6c}$$

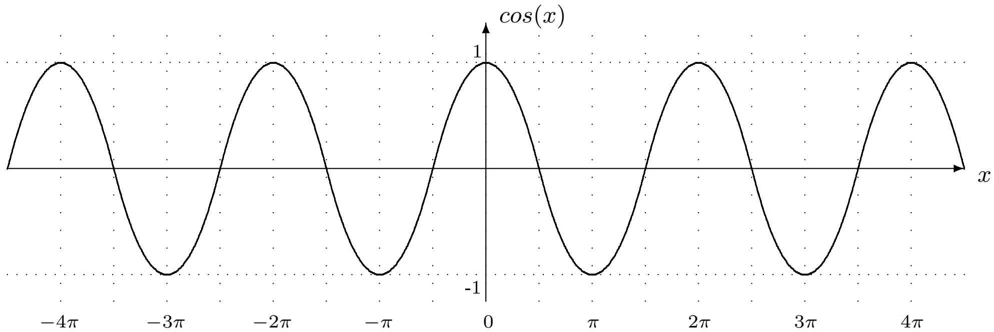


Figura 1.12: Senóide $cos(x)$

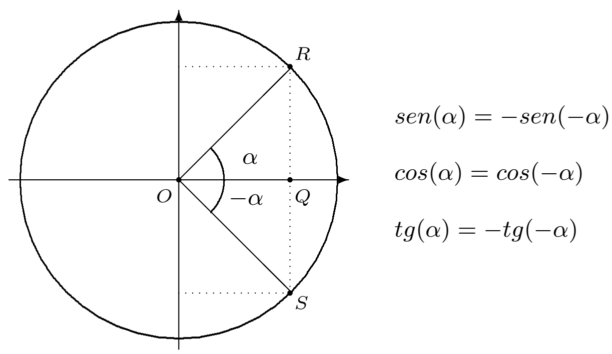


Figura 1.13: Simetrias do seno, cosseno e tangente.

Deslocamentos (translações) horizontais

As identidades de translação estabelecem o efeito da substituição de α por $\alpha - \frac{\pi}{2}$ e de α por $\alpha + \frac{\pi}{2}$. Pela congruência dos triângulos da Figura 1.14(a) observamos que

$$\overline{OR} = \overline{OQ} \quad \therefore \quad sen(\alpha) = cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right), \tag{1.6d}$$

e

$$\overline{OP} = -\overline{OS} \quad \therefore \quad cos(\alpha) = -sen\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right). \tag{1.6e}$$

De modo análogo, pela Figura 1.14(b) observamos que

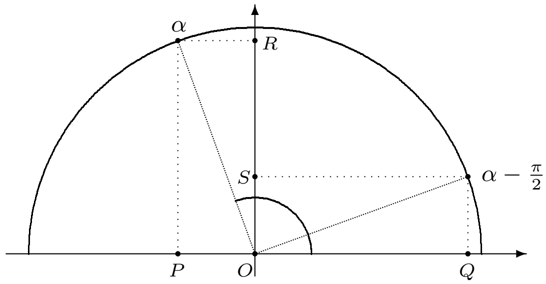
$$\overline{OQ} = \overline{OR} \quad \therefore \quad cos(\alpha) = sen\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right). \tag{1.6f}$$

e

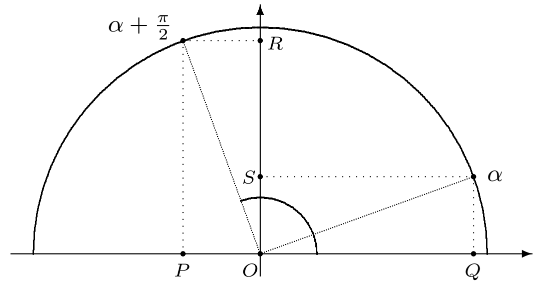
$$\overline{OS} = -\overline{OP} \quad \therefore \quad sen(\alpha) = -cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right). \tag{1.6g}$$

Cosseno da diferença

Iniciamos deduzindo a fórmula do cosseno da diferença. Calculando o quadrado da distância entre os pontos P e Q da Figura 1.15 temos:



(a) Ângulos α e $\alpha - \frac{\pi}{2}$



(b) Ângulos α e $\alpha + \frac{\pi}{2}$

Figura 1.14: Ângulos deslocados (transladados).

$$
\begin{aligned}
\overline{PQ}^2 &= \big[cos(\alpha) - cos(\beta)\big]^2 + \big[sen(\alpha) - sen(\beta)\big]^2 \\
&= cos^2(\alpha) - 2cos(\alpha)cos(\beta) + cos^2(\beta) + sen^2(\alpha) - 2sen(\alpha)sen(\beta) + sen^2(\beta) \\
&= cos^2(\alpha) + sen^2(\alpha) + cos^2(\beta) + sen^2(\beta) - 2cos(\alpha)cos(\beta) - 2sen(\alpha)sen(\beta) \\
&= 1 + 1 - 2cos(\alpha)cos(\beta) - 2sen(\alpha)sen(\beta) \\
&= 2 - 2\big[cos(\alpha)cos(\beta) + sen(\alpha)sen(\beta)\big]
\end{aligned}
$$

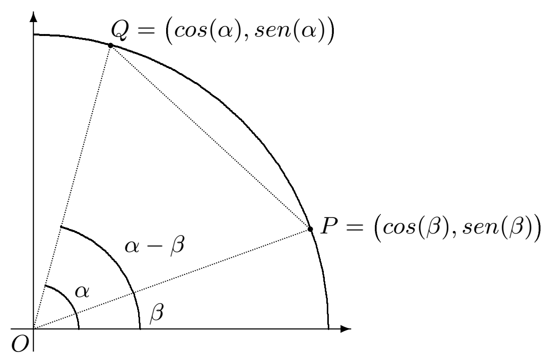


Figura 1.15: O cosseno da diferença: $cos(\alpha - \beta)$

Aplicando a Lei dos Cossenos no triângulo OPQ da Figura 1.15 temos:

$$
\begin{aligned}
\overline{PQ}^2 &= \overline{OP}^2 + \overline{OQ}^2 - 2\,\overline{OP}\,\overline{OQ}\,cos(\alpha - \beta) \\
&= 1 + 1 - 2cos(\alpha - \beta) \\
&= 2 - 2cos(\alpha - \beta)
\end{aligned}
$$

Igualando os resultados obtidos para $\overline{PQ}^2$ obtemos o cosseno da diferença

$$cos(\alpha - \beta) = cos(\alpha)cos(\beta) + sen(\alpha)sen(\beta)$$

Cosseno da soma

O cosseno da soma pode agora ser obtido usando um artifício algébrico engenhoso - substituímos a soma por uma diferença e aplicamos o cosseno da diferença

$$cos(\alpha + \beta) = cos\big[\alpha - (-\beta)\big] = cos(\alpha)cos(-\beta) + sen(\alpha)sen(-\beta)$$

e então aplicamos as identidades (1.6a) e (1.6b) para obtermos o cosseno da soma

$$cos(\alpha+\beta) = cos(\alpha)cos(\beta) - sen(\alpha)sen(\beta)$$

Seno da diferença

Para obtermos o seno da diferença, inicialmente usamos a identidade (1.6d) para escrever

$$sen(\alpha-\beta) = cos\left(\alpha-\beta-\frac{\pi}{2}\right) = cos\left[\alpha-\left(\beta+\frac{\pi}{2}\right)\right]$$

e a seguir aplicamos o cosseno da diferença no membro direito

$$sen(\alpha-\beta) = cos(\alpha)cos\left(\beta+\frac{\pi}{2}\right) + sen(\alpha)sen\left(\beta+\frac{\pi}{2}\right).$$

Mas, pelo cosseno da soma

$$cos\left(\beta+\frac{\pi}{2}\right) = cos(\beta)cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - sen(\beta)sen\left(\frac{\pi}{2}\right) = -sen(\beta)$$

e pela identidade (1.6f)

$$sen\left(\beta+\frac{\pi}{2}\right) = cos(\beta).$$

Assim o seno da diferença é dado por

$$sen(\alpha-\beta) = sen(\alpha)cos(\beta) - cos(\alpha)sen(\beta)$$

Seno da soma

O seno da soma pode ser obtido pelo mesmo artifício aplicado na dedução do cosseno da soma - substituímos a soma por uma diferença e aplicamos o seno da diferença

$$sen(\alpha+\beta) = sen\big[\alpha-(-\beta)\big] = sen(\alpha)cos(-\beta) - cos(\alpha)sen(-\beta)$$

e então aplicamos as identidades (1.6a) e (1.6b) para obtermos o seno da soma

$$sen(\alpha+\beta) = sen(\alpha)cos(\beta) + cos(\alpha)sen(\beta)$$

Sumário das fórmulas da soma e diferença

Sumarizamos aqui os resultados obtidos:

$$cos(\alpha-\beta) = cos(\alpha)cos(\beta) + sen(\alpha)sen(\beta) \tag{1.6h}$$

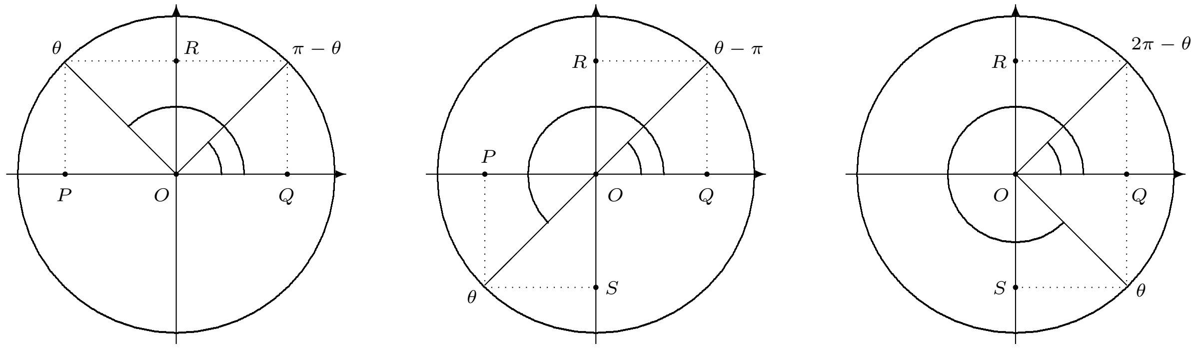
$$cos(\alpha+\beta) = cos(\alpha)cos(\beta) - sen(\alpha)sen(\beta) \tag{1.6i}$$

$$sen(\alpha-\beta) = sen(\alpha)cos(\beta) - cos(\alpha)sen(\beta) \tag{1.6j}$$

$$sen(\alpha+\beta) = sen(\alpha)cos(\beta) + cos(\alpha)sen(\beta) \tag{1.6k}$$

1.7 Redução ao Primeiro Quadrante

Os eixos coordenados dividem o plano cartesiano em quadrantes:



(a) Do 2^o ao 1^o quadrante (b) Do 3^o ao 1^o quadrante (c) Do 4^o ao 1^o quadrante

Figura 1.16: Redução ao primeiro quadrante.

- 1^o quadrante: $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$;
- 2^o quadrante: $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$;
- 3^o quadrante: $\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$;
- 4^o quadrante: $\frac{3\pi}{2} < \theta < 2\pi$.

Dado um ângulo θ, reduzi-lo ao primeiro quadrante consiste em determinar um ângulo no primeiro quadrante que possua as mesmas razões trigonométricas de θ, a menos de um sinal. Devemos considerar 3 casos.

Redução do segundo ao primeiro quadrante

Na Figura 1.16(a) observamos que se $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ então sua redução ao primeiro quadrante é $\pi - \theta$. Temos que

- $sen(\theta) = \overline{OR} = sen(\pi - \theta)$
- $cos(\theta) = \overline{OP} = -\overline{OQ} = -cos(\pi - \theta)$

Conseqüentemente

- $tg(\theta) = -tg(\pi - \theta)$
- $ctg(\theta) = -cotg(\pi - \theta)$
- $sec(\theta) = -sec(\pi - \theta)$
- $csc(\theta) = csc(\pi - \theta)$

Exemplo 1.4 *O ângulo $\frac{5\pi}{6}$ está no segundo quadrante, pois $\frac{\pi}{2} < \frac{5\pi}{6} < \pi$. Assim sua redução ao primeiro quadrante é $\pi - \frac{5\pi}{6} = \frac{\pi}{6}$. Logo*

$$sen\left(\frac{5\pi}{6}\right) = sen\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2} \qquad e \qquad cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) = -cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Redução do terceiro ao primeiro quadrante

Na Figura 1.16(b) observamos que se $\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$ então sua redução ao primeiro quadrante é $\theta - \pi$. Temos que

- $sen(\theta) = \overline{OS} = -\overline{OR} = -sen(\theta - \pi)$
- $cos(\theta) = \overline{OP} = -\overline{OQ} = -cos(\theta - \pi)$

Conseqüentemente

- $tg(\theta) = tg(\theta - \pi)$
- $ctg(\theta) = cotg(\theta - \pi)$
- $sec(\theta) = -sec(\theta - \pi)$
- $csc(\theta) = -csc(\theta - \pi)$

Exemplo 1.5 *O ângulo $\frac{5\pi}{4}$ está no terceiro quadrante, pois $\pi < \frac{5\pi}{4} < \frac{3\pi}{2}$. Assim sua redução ao primeiro quadrante é $\frac{5\pi}{4} - \pi = \frac{\pi}{4}$. Logo*

$$sen\left(\frac{5\pi}{4}\right) = -sen\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \qquad e \qquad cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) = -cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Redução do quarto ao primeiro quadrante

Na Figura 1.16(c) observamos que se $\frac{3\pi}{2} < \theta < 2\pi$ então sua redução ao primeiro quadrante é $2\pi - \theta$. Temos que

- $sen(\theta) = \overline{OS} = -\overline{OR} = -sen(2\pi - \theta)$
- $cos(\theta) = \overline{OQ} = cos(2\pi - \theta)$

Conseqüentemente

- $tg(\theta) = -tg(2\pi - \theta)$
- $ctg(\theta) = -cotg(2\pi - \theta)$
- $sec(\theta) = sec(2\pi - \theta)$
- $csc(\theta) = -csc(2\pi - \theta)$

Exemplo 1.6 *O ângulo $\frac{5\pi}{3}$ está no quarto quadrante, pois $\frac{3\pi}{2} < \frac{5\pi}{3} < 2\pi$. Assim sua redução ao primeiro quadrante é $2\pi - \frac{5\pi}{3} = \frac{\pi}{3}$. Logo*

$$sen\left(\frac{5\pi}{3}\right) = -sen\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \qquad e \qquad cos\left(\frac{5\pi}{3}\right) = cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$$

1.8 Equações trigonométricas

Uma equação trigonométrica é aquela que envolve as funções trigonométricas *seno*, *cosseno*, *tangente*, *cotangente*, *secante*, *cossecante*. Resolver uma equação trigonométrica significa encontrar os valores do ângulo que a verifica. Para este propósito a Tabela 1.2, que nos dá os valores do *seno*, *cosseno* e *tangente* dos ângulos notáveis do 1^o quadrante, será de grande auxílio.

θ	$sen(\theta)$	$cos(\theta)$	$tg(\theta)$
0	0	1	0
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{2}$	1	0	$\nexists$

Tabela 1.2: Seno, cosseno e tangente dos ângulos notáveis do 1^o quadrante

A Tabela 1.2 nos fornece os valores de *seno*, *cosseno* e *tangente* apenas para os ângulos notáveis do 1^o quadrante. A Figura 1.17 mostra os ângulos nos segundo, terceiro e quarto quadrantes redutíveis aos notáveis do primeiro quadrante.

Exemplo 1.7 *Resolver a equação $sen(x) = 0$.*

Solução: pela Tabela 1.2 temos que $x = 0$. Observando a Figura 1.17 temos que $x = \pi$ também é uma solução da equação dada. Além disto, qualquer arco côngruo a estes também são soluções, de modo que a solução geral é da forma

$$x = k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Exemplo 1.8 *Resolver a equação $sen(x) = cos(x)$.*

Solução: pela Tabela 1.2 temos que $x = \frac{\pi}{4}$. Observando a Figura 1.17 temos que $x = \frac{5\pi}{4}$ (simétrico de $\frac{\pi}{4}$ em relação à origem) também é uma solução da equação dada. Além disto, qualquer arco côngruo a estes também são soluções, de modo que a solução geral pode ser dada como

$$x = \frac{\pi}{4} + k\pi \ , k \in \mathbb{Z}.$$

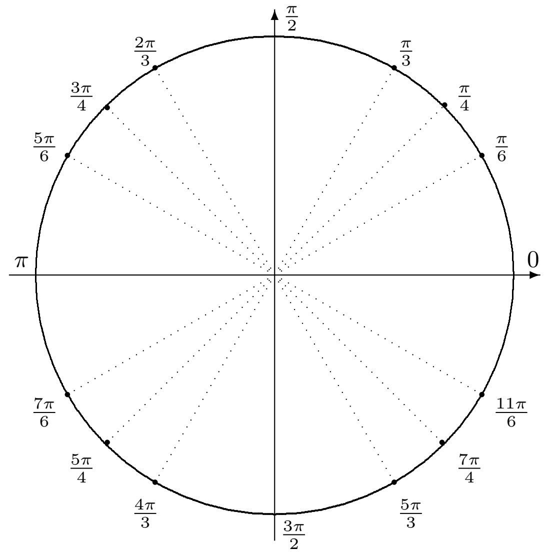


Figura 1.17: Ângulos redutíveis aos notáveis

Exemplo 1.9 *Resolver a equação* $2cos(x) - 1 = 0$.

Solução: temos que $cos(x) = \frac{1}{2}$, *e pela Tabela 1.2 temos que* $x = \frac{\pi}{3}$. *Observando a Figura 1.17 observamos que* $x = \frac{5\pi}{3} = -\frac{\pi}{3}$ *(simétrico de* $\frac{\pi}{3}$ *em relação ao eixo horizontal) também é uma solução da equação dada. Além disto, qualquer arco côngruo a estes também são soluções, de modo que a solução geral pode ser dada como*

$$x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3}\ , k \in \mathbb{Z}.$$

1.9 Problemas Propostos

Problema 1.1 *[Mack-SP] A medida de um ângulo é* 225^o. *Determine sua medida em radianos.*

Problema 1.2 *[Fuvest-SP] Qual o valor do ângulo agudo formado pelos ponteiros de um relógio à* 1 *hora e* 12 *minutos.*

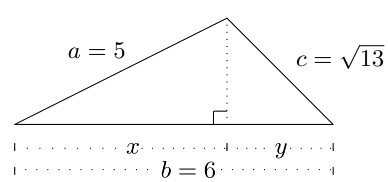
Problema 1.3 *[UF-PA] Quantos radianos percorre o ponteiro dos minutos de um relógio em* 50 *minutos?*

Problema 1.4 *A altura de um triângulo equilátero mede* $2\,cm$. *Determine seu perímetro e sua área.*

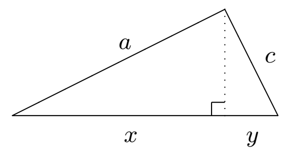
Problema 1.5 *A diagonal de um quadrado mede* $3\sqrt{6}\,cm$. *Determine seu perímetro e sua área.*

Problema 1.6 *[PUC-SP] Se a altura de um trapézio isóceles medir* $8\,dm$ *e suas bases medirem, respectivamente,* $27\,dm$ *e* $15\,dm$, *determine a medida de suas diagonais.*

Problema 1.7 *No triângulo dado determine as medidas* x *e* y.



Problema 1.8 *No triângulo dado sabe-se que* $c = 5$, $y = 3$ *e lado de comprimento* a *é perpendicular ao lado de comprimento* c. *Determine* a *e* x.



Problema 1.9 *Em um triângulo retângulo um dos catetos mede* 5 *e sua projeção sobre a hipotenusa mede* 4*. Determine:*

(a) o comprimento do outro cateto;

(b) o comprimento da hipotenusa;

(c) seu perímetro;

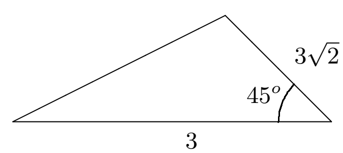
(d) sua área.

Problema 1.10 *Em um triângulo a hipotenusa mede* 10 *e a razão entre os comprimentos dos catetos é* $\frac{3}{4}$*. Determine os comprimentos das projeções dos catetos sobre a hipotenusa.*

Problema 1.11 *[PUC-SP] O perímetro de um losângo mede* $20\,cm$ *e uma de sua diagonais mede* $8\,cm$*. Quanto mede a outra diagonal?*

Problema 1.12 *Num triângulo retângulo a altura relativa à hipotenusa mede* $12\,cm$ *e a projeção de um dos catetos sobre a hipotenusa mede* $16\,cm$*. Determine o comprimento dos catetos deste triângulo.*

Problema 1.13 *Determine o perímetro e a área do triângulo dado.*



Problema 1.14 *Os lados de um triângulo medem* $a = \sqrt{2}$*,* $b = 2$ *e* $c = 1 + \sqrt{3}$*. Determine as medidas de seus ângulos.*

Problema 1.15 *Um triângulo tem seus vértices nos pontos* A*,* B *e* C*. Sabe-se que* $\overline{AC} = \overline{BC} = \sqrt{2}$*. Se* $\overline{AB} = 2$ *e* α *é o ângulo oposto ao lado* $\overline{BC}$*, determine* α*.*

Problema 1.16 *Um terreno têm a forma de um paralelogramo cujos lados medem* $40\,m$ *e um dos ângulo internos mede* 120^o*. Seu proprietário irá cercá-lo e também dividi-lo ao meio com uma cerca com* 3 *fios de arame. Determine a quantidade de arame a ser utilizada.*

Problema 1.17 *[ITA-SP] Os lados de um triângulo medem* a*,* b *e* c *centímetros. Qual o valor do ângulo interno deste triângulo, oposto ao lado que mede* a *centímetros, se forem satisfeitas as seguintes relações:* $3a = 7c$ *e* $3b = 8c$*.*

Problema 1.18 *[ITA-SP] Num losângo* $ABCD$ *a soma das medidas dos ângulos obtusos é o triplo da soma das medidas dos ângulos agudos. Se sua diagonal menor mede* d*, determine sua aresta.*

Problema 1.19 *[Universidade Gama Filho - RJ] Calcular os valores de* k *que verificam simultaneamente as igualdades:* $sen(\theta) = k - 1$ *e* $cos(\theta) = \sqrt{3 - k^2}$*.*

Problema 1.20 *Para cada razão trigonométrica dada utilize as identidades da Seção 1.3 para determinar as outras cinco.*

(a) $sen(\alpha) = \frac{3}{5}$

(b) $cos(\beta) = \frac{1}{7}$

(c) $tg(\gamma) = 4$

(d) $cotg(\delta) = 3$

(e) $cos(\epsilon) = \frac{3}{5}$

(f) $tg(\theta) = \frac{1}{2}$

(g) $csc(\phi) = 2$

(h) $sec(\sigma) = 3$

Problema 1.21 *Uma pessoa na margem de um rio vê, sob um ângulo de* 60^o*, o topo de uma torre na margem oposta. Quando ela se afasta* $40\,m$ *perpendicularmente à margem do rio, esse ângulo é de* 30^o*.*

(a) *Qual a largura do rio?*

(b) *Qual a altura da torre?*

Problema 1.22 *Verifique a veracidade das igualdades a seguir.*

(a) $\frac{sen(\alpha)}{1+cos(\alpha)} + \frac{1+cos(\alpha)}{sen(\alpha)} = 2csc(\alpha)$

(b) $\frac{2-sen^2(\beta)}{cos^2(\beta)} - tg^2(\beta) = 2$

(c) $\frac{tg(\gamma)}{1+tg^2(\gamma)} = sen(\gamma)cos(\gamma)$

(d) $\frac{sec(\theta)+sen(\theta)}{csc(\theta)+cos(\theta)} = tg(\theta)$

(e) $sec^2(\phi)csc^2(\phi) = tg^2(\phi) + cotg^2(\phi) + 2$

(f) $\left[tg(\sigma) - sen(\sigma)\right]^2 + \left[1 - cos(\sigma)\right]^2 = \left[sec(\sigma) - 1\right]^2$

Problema 1.23 *Explique por quê as igualdades dadas são inválidas.*

(a) $sen(\alpha) = 3$

(b) $cos(\alpha) = 5$

(c) $sec(\alpha) = \frac{1}{2}$

(d) $csc(\alpha) = \frac{3}{4}$

Problema 1.24 *Dois ângulos α e β são ditos complementares se $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$. Use a Figura 1.4 para se convencer dos seguintes fatos:*

(a) *o seno de um ângulo é igual ao cosseno de seu complementar;*

(b) *o cosseno de um ângulo é igual ao seno de seu complementar;*

(c) *a tangente de um ângulo é igual à cotangente de seu complementar;*

(d) *a cotangente de um ângulo é igual à tangente de seu complementar;*

(e) *a secante de um ângulo é igual à cossecante de seu complementar;*

(f) *a cossecante de um ângulo é igual à secante de seu complementar.*

Problema 1.25 *Os lados de um paralelogramo medem a e b e suas diagonais x e y. Mostre que*

$$x^2 + y^2 = 2(a^2 + b^2).$$

Problema 1.26 *[Cescem-SP] Em quais quadrantes estão os ângulos α, β e γ tais que: $sen(\alpha) < 0$ e $cos(\alpha) < 0$; $cos(\beta) < 0$ e $tg(\beta) < 0$; $sen(\gamma) > 0$ e $cotg(\gamma) > 0$, respectivamente.*

Problema 1.27 *[FECAP-SP] Determine o valor da expressão: $sen(\pi/4) + cos(\pi/4) + cos(\pi/2 + \pi/4)$.*

Problema 1.28 *[Santa Casa-SP] Seja a função f, de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ definida por $f(x) = 1 + 4sen(x)$. Determine o intervalo do conjunto imagem dessa função.*

Problema 1.29 *[UFP-RS] Qual o intervalo do conjunto imagem da função f, $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ definida por $f(x) = 2sen(x) - 3$.*

Problema 1.30 *Para quais valores de a as sentenças $sen(x) = \sqrt{a}$ e $cos(x) = 2\sqrt{a} - 1$ são verdadeiras para todo x real.*

Problema 1.31 *[UF São Carlos-SP] Calcule o valor da expressão: $\frac{2-sen^2(x)}{cos^2(x)} - tg^2(x)$.*

Problema 1.32 *[FGV-RJ] Determine a funçaõ trigonométrica equivalente a $\frac{sec(x)+sen(x)}{cossec(x)+cos(x)}$.*

Problema 1.33 *[PUC-RS] Determine a igualdade da expressão: $\frac{sen(x)}{1+cos(x)} + \frac{1+cos(x}{sen(x)}$.*

Problema 1.34 *[FEP-PA] No círculo trigonométrico um ângulo é tal que seu seno vale* $\frac{3}{5}$ *e encontra-se no segundo quadrante. Calcule o valor da tangente deste ângulo.*

Problema 1.35 *[Edson Queiroz-CE] Sabendo que* $sec(x) = 3$ *e* $tg(x) < 0$*, calcule sen(x).*

Problema 1.36 *[ITA-SP] Calcule o valor da expressão* $y = \frac{2tg(x)}{1-tg^2(x)}$ *quando* $cos(x) = \frac{-3}{7}$ *e* $tg(x) < 0$.

Problema 1.37 *[PUC-RS] Sendo* $tg(x) = \frac{-\sqrt{7}}{7}$ *e* $\frac{\pi}{2} < x < \pi$*, calcule* $sen(x)$.

Problema 1.38 *[PUC-SP] Quais os valores de x satisfazem a equação* $cos(3x - \frac{\pi}{5}) = 0$.

Problema 1.39 *[Cescea-SP] Determine a soma das raízes da equação* $1 - 4cos^2(x) = 0$ *compreendidas entre* 0 *e* π.

Problema 1.40 *[AMAN-RJ] Determine os valores de x que satisfazem a equação* $3^{cos(2x)} = 1$.

Problema 1.41 *[FC Chagas-BA] Determine o número de soluções da equação* $cos(2x) = -\frac{1}{2}$*, no intervalo* $[-\pi, \pi]$.

Problema 1.42 *[Mack-SP] Determine os valores de x para que* $sen(x) = sen(x + \pi)$*, no intervalo* $0 \leq x \leq 2\pi$.

Problema 1.43 *[Osec-SP] Determine o conjunto solução da equação* $cos(x) = cos(\frac{\pi}{3} - x)$*, sendo* $0 < x < 2\pi$.

Problema 1.44 *[UF Uberlândia-MG] Determine o conjunto solução da equação* $tg(x + 1)\sqrt{3}cotg(x) - 1 = 0$ *no intervalo* $[0, \pi]$.

Problema 1.45 *[Fac. Belas Artes-SP] Determine os valores de x na equação* $tg(x) + cotg(x) = 2$.

Problema 1.46 *[Mack-SP] Determine os valores de x na equação* $sen^2(x) = \frac{1+cos(x)}{2}$*, no intervalo* $[0, 2\pi]$.

Problema 1.47 *[Metodista-S.B. do Campo-SP] Determine os valores de x na equação* $sec^2(x) + 2tg^2(x) = 2$ *no intervalo*$[0, 2\pi]$.

Problema 1.48 *[Cesgranrio-RJ] Determine as raizes da equação* $cos^2(x) - sen^2(\pi - x) = \frac{1}{2}$ *no intervalo* $[0, \pi]$.

Problema 1.49 *[Cesgranrio-RJ] Determine a soma das quatro raizes da equação* $sen^2(x)+sen(-x) = 0$*, no intervalo* $[0, 2\pi]$.

Problema 1.50 *[CESESP-PE] Determine o conjunto solução da equação* $\frac{1}{1+sen(x)} + \frac{1}{1-sen(x)} = \frac{1}{cos^2(x)}$.

Problema 1.51 *[Mack-SP] Determine a expressão geral dos arcos x para os quais* $2\big[cos(x) + sec(x)\big] = 5$.

Problema 1.52 *[FGV-RJ] Determine a solução da equação:* $3\big[1 - cos(x)\big] = sen^2(x)$.

Problema 1.53 *[FGV-SP] Determine a soma das raízes da equação*

$$sen^3(x) - 3sen^2(x)cos(x) + 3sen(x).cos^2(x) - cos^3(x) = 0$$

no intervalo $[0, 2\pi]$.

Problema 1.54 *[Mack-SP] Sendo* $sen(x) = \frac{12}{13}$ *e* $sen(y) = \frac{4}{5}$, $0 < x, y < \frac{\pi}{2}$*, determine* $sen(x - y)$.

Problema 1.55 *[FEI-SP] Se* $cos(x) = \frac{3}{5}$*, calcule* $sen(x - \frac{\pi}{2})$.

Problema 1.56 *[F . S . Judas-SP] Se* $sen(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ *e x um arco do segundo quadrante, então calcule*

$$sen(x - \frac{\pi}{2})cos(x - \frac{\pi}{2}).$$

Problema 1.57 *[UC-MG] Prove que* $\frac{2tg(x)}{1+tg^2(x)}$ *é idêntica a* $sen(2x)$.

Problema 1.58 *[UF-GO] Se* $sen(x) = \frac{\sqrt{3}}{6}$, *calcule* $cos(2x)$.

Problema 1.59 *[F. S. Judas-SP] Se* $sen(x) = \frac{2}{3}$ *e* x *um arco do primeiro quadrante, então calcule* $sen(2x)$.

Problema 1.60 *[UCP-PR] Sabendo que* $cos(36^o) = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$, *calcule* $cos(72^o)$.

Problema 1.61 *[AMAN-RJ] Determine os valores de* x *que satisfazem a inequação:* $cos(5x) \leq \frac{1}{2}$.

Problema 1.62 *[FGV-SP] Determine a solução da inequação* $\sqrt{2}.cos^2(x) > cos(x)$ *no intervalo* $[0, \pi]$.

Problema 1.63 *[UF São Carlos-SP] Determine o conjunto solução da inequação* $\frac{1}{cossec(x)} - \frac{1}{sec(x)} > 0$, *para* $0 \leq x \leq \pi$.

Problema 1.64 *[Mack-SP] Determine a solução da inequação* $\frac{cos(x)-sen(x)}{cos(x)+sen(x)}$, *para* $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

Problema 1.65 *[PUC-SP] Determine a solução da inequação* $\frac{sen(x)-2}{cos(2x)+3cos(x-1)} > 0$, *no conjunto* $0 \leq x \leq 2\pi$.

Problema 1.66 *[ITA-SP] Dado o polinômio* P *definido por* $P(x) = sen(\theta) - tg(\theta)x + sec^2(\theta)x^2$, *determine os valores de* θ *no intervalo* $[0, 2\pi]$ *tais que* P *admita somente raízes reais.*

Problema 1.67 *Use as identidades* (1.6i) *e* (1.6k) *para deduzir a tangente da soma*

$$tg(\alpha + \beta) = \frac{tg(\alpha) + tg(\beta)}{1 - tg(\alpha)tg(\beta)}.$$

Problema 1.68 *Use as identidades* (1.6h) *e* (1.6j) *para deduzir a tangente da diferença*

$$tg(\alpha - \beta) = \frac{tg(\alpha) - tg(\beta)}{1 + tg(\alpha)tg(\beta)}.$$

Problema 1.69 ***(Fórmulas do ângulo duplo)****.*

(a) Use a identidade (1.6i) *para mostrar o cosseno do ângulo duplo (sugestão: faça* $2\alpha = \alpha + \alpha$*)*

$$cos(2\alpha) = cos^2(\alpha) - sen^2(\alpha).$$

(b) Use a identidade (1.6k) *para mostrar o seno do ângulo duplo*

$$sen(2\alpha) = 2cos(\alpha)sen(\alpha).$$

Problema 1.70 ***(Fórmulas do ângulo metade)****. Use a identidade fundamental e o cosseno do ângulo duplo para deduzir o cosseno e o seno do ângulo metade*

$$cos^2(\alpha) = \frac{1}{2}\left[1 + cos(2\alpha)\right].$$

$$sen^2(\alpha) = \frac{1}{2}\left[1 - cos(2\alpha)\right].$$

Problema Teórico 1.1 *Demonstre a Lei dos Senos (Figura 1.8).*

1.10 Respostas dos Problemas Propostos - Capítulo 1

- 1.1 (página 14) $\frac{5\pi}{4}$
- 1.2 (página 14) 36^o
- 1.3 (página 14) $\frac{5\pi}{3}$
- 1.4 (página 14)
  perímetro $= 4\sqrt{3}\,cm$ e área $= \frac{4\sqrt{3}}{3}\,cm^2$
- 1.5 (página 14)
  perímetro $= 12\sqrt{3}\,cm$ e área $= 27\,cm^2$
- 1.5 (página 14)
  $\sqrt{505}\,dm$
- 1.7 (página 14) $x = 4$ e $y = 2$
- 1.8 (página 14) $a = \frac{20}{3}$ e $x = \frac{16}{3}$
- 1.9 (página 15)

  (a) $\frac{15}{4}$;
  (b) $\frac{25}{4}$;
  (c) 15;
  (d) $\frac{75}{8}$.

- 1.10 (página 15) $\frac{18}{5}$ e $\frac{32}{5}$
- 1.11 (página 15) $6\,cm$
- 1.12 (página 15) $15\,cm$ e $20\,cm$
- 1.13 (página 15) perímetro $= 6 + 3\sqrt{2}$ e área $= \frac{9}{2}$
- 1.14 (página 15) 30^o, 45^o e 105^o
- 1.15 (página 15) $\alpha = 45^o = \frac{\pi}{4}$ radianos
- 1.16 (página 15) $600\,m$ de arame
- 1.17 (página 15) 60^o
- 1.18 (página 15) $\frac{d}{\sqrt{2-\sqrt{2}}}$
- 1.19 (página 15) $k = \frac{3}{2}$
- 1.20 (página 15)
  (a) $cos(\alpha) = \frac{4}{5}$, $tg(\alpha) = \frac{3}{4}$, $cotg(\alpha) = \frac{4}{3}$, $sec(\alpha) = \frac{5}{4}$, $csc(\alpha) = \frac{5}{3}$.
  (b) $sen(\beta) = \frac{4\sqrt{3}}{7}$, $tg(\beta) = 4\sqrt{3}$, $cotg(\beta) = \frac{\sqrt{3}}{12}$, $sec(\beta) = 7$, $csc(\beta) = \frac{7\sqrt{3}}{12}$.
  (c) $cos(\gamma) = \frac{\sqrt{17}}{17}$, $sen(\gamma) = \frac{4\sqrt{17}}{17}$, $cotg(\gamma) = \frac{1}{4}$, $sec(\gamma) = \sqrt{17}$, $csc(\gamma) = \frac{\sqrt{17}}{4}$.
  (d) $cos(\delta) = \frac{3\sqrt{10}}{10}$, $sen(\delta) = \frac{\sqrt{10}}{10}$, $tg(\delta) = \frac{1}{3}$, $sec(\alpha) = \frac{\sqrt{10}}{3}$, $csc(\alpha) = \sqrt{10}$.
  (e) $sen(\epsilon) = \frac{4}{5}$, $tg(\epsilon) = \frac{4}{3}$, $cotg(\epsilon) = \frac{3}{4}$, $sec(\epsilon) = \frac{5}{3}$, $csc(\epsilon) = \frac{5}{4}$.
  (f) $cos(\theta) = \frac{2\sqrt{5}}{5}$, $sen(\theta) = \frac{\sqrt{5}}{5}$, $cotg(\theta) = 2$, $sec(\theta) = \frac{\sqrt{5}}{2}$, $csc(\theta) = \sqrt{5}$.
  (g) $cos(\phi) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $sen(\phi) = \frac{1}{2}$, $tg(\phi) = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $cotg(\phi) = \sqrt{3}$, $sec(\phi) = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.
  (h) $cos(\sigma) = \frac{1}{3}$, $sen(\sigma) = \frac{2\sqrt{2}}{3}$, $tg(\sigma) = 2\sqrt{2}$, $cotg(\sigma) = \frac{\sqrt{2}}{4}$, $csc(\sigma) = \frac{3\sqrt{2}}{4}$.
- 1.21 (página 15)

  (a) $20\,m$
  (b) $20\sqrt{3}\,m$

- 1.26 (página 16) 3^o, 2^o e 1^o
- 1.27 (página 16) $\frac{\sqrt{2}}{2}$
- 1.28 (página 16) $[-3, 5]$
- 1.29 (página 16) $[-5, -1]$
- 1.30 (página 16) $a = 0$ ou $a = \frac{16}{25}$
- 1.31 (página 16) 2
- 1.32 (página 16) $tg(x)$
- 1.33 (página 16) $2cossec(x)$
- 1.34 (página 17) $-3/4$
- 1.35 (página 17) $\frac{-2\sqrt{2}}{3}$
- 1.36 (página 17) $\frac{12\sqrt{10}}{31}$
- 1.37 (página 17) $\frac{\sqrt{2}}{4}$
- 1.38 (página 17) $\frac{7\pi}{30} + k\frac{\pi}{3}$
- 1.39 (página 17) π
- 1.40 (página 17) $\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$
- 1.41 (página 17) $4 : -\frac{2\pi}{3}, \frac{-\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}$
- 1.42 (página 17) $0, \pi, 2\pi$
- 1.43 (página 17) $\frac{\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}$
- 1.44 (página 17) $\frac{\pi}{3}$ e $\frac{\pi}{4}$
- 1.45 (página 17) $\frac{\pi}{4} \pm \pi$
- 1.46 (página 17) $\frac{\pi}{6}$, $\frac{11\pi}{6}$ e π
- 1.47 (página 17) $\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$
- 1.48 (página 17) $\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$
- 1.49 (página 17) $\frac{7\pi}{2}$
- 1.50 (página 17) $\frac{\pi}{2} + k\pi$
- 1.51 (página 17) $2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$
- 1.52 (página 17) $x = k.360^o$
- 1.53 (página 17) $\frac{3\pi}{2}$
- 1.54 (página 17) $\frac{16}{65}$
- 1.55 (página 17) $\frac{-3}{5}$
- 1.56 (página 17) $0,5$
- 1.58 (página 18) $\frac{5}{6}$
- 1.59 (página 18) $\frac{4\sqrt{5}}{9}$
- 1.60 (página 18) $\frac{\sqrt{5}-1}{4}$
- 1.61 (página 18) $\frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{15} \leq x \leq \frac{2k\pi}{5} + \frac{\pi}{3}$
- 1.62 (página 18) $0 \leq x < \frac{\pi}{4}$ ou $\frac{\pi}{2} < x \leq \pi$
- 1.63 (página 18) $\frac{\pi}{4} < x < \frac{3\pi}{4}$
- 1.64 (página 18) $0 < x < \frac{\pi}{4}$
- 1.65 (página 18) $\frac{\pi}{3} < x < \frac{5\pi}{3}$
- 1.66 (página 18) $\pi \leq \theta < \frac{3\pi}{2}$ ou $\frac{3\pi}{2} < \theta \leq 2\pi$